Tetraedrometrie

von

Dr. Gustav Junghann.

Zweiter Theil.

Die Eckenfunctionen in Verbindung mit Längen-, Flächen- und Körpergrössen.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Gotha.

E. F. Thienemann.

1863.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorwort.

Dem im Vorworte des ersten Theiles besprochenen Plane gemäss erstatte ich hiermit einen zweiten Bericht über die Ergebnisse meiner Forschungen auf dem Gebiete der Tetraedrometrie, ohne diese Forschungen abgeschlossen zu haben. Ob noch ein dritter folgen werde, kann ich mit Bestimmtheit weder bejahen noch verneinen; bejahen nicht, weil mit diesem zweiten Theil das nächste und hauptsächlichste Ziel des Buches erreicht ist; verneinen nicht, weil bei der Neuheit der Sache kaum zu beurtheilen ist, ob nicht die fernere Beschäftigung mit derselben noch ungeahnte Seiten aufdecken wird, welche neue Mittheilung fordern. Hat sich doch der einfache Satz 116, welcher die Anwendung der Eckenfunctionen ohne alle Beziehung zum Tetraeder auf ganz andere Gebiete hinüberspielt, erst am letzten 7. October ganz unerwartet eingefunden, als fast alles Uebrige schon beisammen war.

Das zunächst angestrebte Ziel ist nicht die Erschöpfung des weiten Gebietes, welches unter dem Titel dieses Buches gedacht werden kann, sondern die Einführung der Eckenfunctionen in die Geometrie. Nachdem nun der erste Theil die reingoniometrischen Beziehungen der Eckenfunctionen ermittelt hat (nämlich die durch Eckensinus und Winkelcosinus ausgedrückten Gesetze der fundamentalen Eckensysteme, so wie die zwischen den verschiedenen Eckenfunctionen stattfindenden Grundbeziehungen): stellt dieser zweite Theil die Eckenfunctionen in Verbindung mit Längen-, Flächen- und Körpergrössen dar*), und zeigt, wie ich

*) Die beiden Theile sind also ihrem Inhalte nach bestimmt von einander gesondert. Nur des bequemen Citirens halber sind die Nummern der Capitel, Paragraphen und Formeln vom Schluss des ersten Theiles durch den zweiten fortgeführt.

*

glaube, an hinreichend vielen Resultaten durch die Einfachheit ihrer Entwickelung, dass die Eckenfunctionen für die Stereometrie ein ebenso wesentliches und unentbehrliches Rechnungselement sind, als die Winkelfunctionen für die Planimetrie. — Oft hat sich mir bei der Bearbeitung dieses zweiten Theiles die Ueberzeugung aufgedrängt, dass die Tetraedrometrie in der Wissenschaft nicht eine Sache der Liebhaberei bleiben könne, dass sie vielmehr — vielleicht nach vollständigerer Entwickelung — allen Mathematikern ganz so unentbehrlich erscheinen werde, wie jetzt die Trigonometrie. Dieser Ueberzeugung auch bei Andern Eingang zu verschaffen, werden, glaube ich, besonders das neunte und das vierzehnte Capitel geeignet sein, in welchem letzteren Carnot's trigonometrischen Auflösungen einer Reihe von Aufgaben, welche wesentlich der Tetraedrometrie angehören, die tetraedrometrischen gegenübergestellt worden sind. — Mein nächstes und hauptsächlichstes Ziel würde ich für erreicht halten, wenn dies Buch nun Andere veranlasste, die hier begonnenen Untersuchungen aufzunehmen, und mit mir sowohl an der Darstellung eines vollständigen Systemes der Tetraedrometrie fortzuarbeiten, als auch die Gesetze der Eckenfunctionen für solche stereometrischen Untersuchungen fruchtbar zu machen, welche nicht speciell auf das Tetraeder gerichtet sind. Dass dies Letztere in der Sache liegt, scheint aus dem neunten Capitel unzweifelhaft hervorzugehen, welches die Umformung der Coordinaten im Raume auf so einfache Formeln bringt, wie sie für die Ebne bekannt sind, und in §. 77 eine neue Form des Gesetzes für vier im Raume das Gleichgewicht haltende Kräfte darlegt.

Wenn man unter einem Systeme der Trigonometrie den Complex der Auflösungen der Aufgaben versteht, welche man zusammenfassen kann in dem allgemeinen Ausdrucke:

„Aus drei primären Bestimmungsstücken des Dreiecks (d. h. Seiten und Winkeln) jedes vierte zu finden“,

so ist ein solches System abgeschlossen mit der Aufstellung der Gleichungen, welche je vier primäre Bestimmungstücke verbinden, und aller möglichen, dem Sinne nach verschiedenen Auflösungen dieser Gleichungen, also für die ebne Trigonometrie mit der Aufstellung und den verschiedenen Auflösungen der Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

und der sie ergänzenden:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

für die sphärische Trigonometrie durch die Aufstellung und die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen, welche in §. 1 der „Tetraedrometrie“ unter Nr. 1 — 4 aufgeführt sind.

Die beiden Systeme der Trigonometrie sind aber, so viel ich weiss, noch nirgends mit einiger Vollständigkeit in dem Sinne durchgeführt, dass man auch die secundären Bestimmungsstücke hineinzieht, worunter ich verstehe z. B. die drei Höhen, die Radien des umschriebenen und der vier Berührungs-Kreise, den Flächeninhalt, und andere in vielleicht nicht abzuschliessender Menge denkbare, zu dreien das Dreieck bestimmende Grössen. Indessen fragt es sich, ob ein solches denkbare System aufzustellen ein wissenschaftliches Bedürfniss sei, da diese secundären Bestimmungsstücke alle wieder an andern Dreiecken, als dem zu berechnenden Hauptdreieck, als primäre erscheinen, und ihre Verbindungen daher immer durch successive Anwendungen jener trigonometrischen Grundgleichungen herzustellen sind.

Um nun ein analoges System der Tetraedrometrie herzustellen, würde zunächst die Vorfrage zu entscheiden sein, welche Bestimmungsgrössen des Tetraeders als primäre zu betrachten seien. Niemand wird Anstand nehmen, die sechs Kanten, die zwölf Winkel der einschliessenden Dreiecke und die sechs Flächenwinkel als solche anzuerkennen. Zweifelhaft könnte es schon erscheinen, ob die drei Winkel je zweier Gegenkanten und die 12 Neigungswinkel der Kanten gegen die Flächen hinzuzunehmen seien, noch mehr, ob auch die Flächeninhalte der vier einschliessenden Dreiecke, und der körperliche Inhalt des Tetraeders, welche Feuerbach dazu rechnet, mit welchen dann aber auch wohl die durch ihre Sinus, oder andere Eckenfunctionen repräsentirten Ekken gleiche Berechtigung haben würden. — Mögen wir nun (wie es nach den bisherigen Anschauungen den Meisten probat scheinen

wird) nur die 6 Kanten, deren 15 Winkel, die 6 Winkel der Flächen und die 12 Winkel der Kanten und Flächen als primäre Bestimmungsstücke des Tetraeders anerkennen, oder (wie nach tetraedrometrischen Anschauungen wohl zu billigen wäre) die vier Ecken, die Flächeninhalte der vier Dreiecke und den körperlichen Inhalt des Tetraeders hinzurechnen, — immer wird es schon eine nicht leichte Aufgabe sein, alle wesentlich verschiedenen Combinationen zu sieben oder, so weit es sich nur um Drehungsgrössen handelt, zu sechs der 39, resp. 48 Bestimmungsstücke herauszufinden, für welche zunächst Gleichungen aufzustellen sind Mit der Aufstellung aller dieser Gleichungen zwischen je sieben, resp. sechs Bestimmungsgrössen, und aller wesentlich verschiedenen Auflösungen dieser Gleichungen würde dann ein „System der Tetraedrometrie“ vollendet sein. Will man aber auch noch secundäre Bestimmungsstücke mit hineinziehen, was alle seitherigen Schriftsteller über das Tetraeder gethan haben, und was (wie auch aus den folgenden Blättern einleuchten wird) hier noch näher liegt, als bei dem ebnen und sphärischen Dreiecke, so wird die Aufgabe — wenigstens für mich — geradezu unabsehbar.

Ich bin nun in meinen Untersuchungen noch nicht dahin gediehen, die Vollendung eines irgend wie abzuschliessenden Systemes der Tetraedrometrie auch nur in Aussicht zu haben, und würde, wenn ich die bis jetzt gefundenen Resultate bis zu dieser Vollendung im Pulte behalten wollte, wahrscheinlich auf deren Veröffentlichung überhaupt zu verzichten haben. Das aber kann nicht räthlich erscheinen, da doch jedenfalls mit der Einführung der Eckenfunctionen in die stereometrischen Rechnungen ein neuer Weg zum Ziele eröffnet ist, und da die in diesem zweiten Theile mitgetheilten Resultate, welche dieser Weg aufgeschlossen hat, wohl zur Genüge darthun, dass er der richtige ist.

So sei denn mit diesem zweiten Theile das Buch, dessen Bestimmung ist, einen neuen Apparat für neue Arbeit zu schaffen, vorläufig abgeschlossen, da es durch etwaige Hinzufügung noch einiger Capitel von der Art des 14., 16. und 17. (welche willkürlich herausgegriffene Gruppen tetraedrischer Aufgaben enthalten), der angedeuteten Idee eines Systems der Tetraedrometrie nicht wesentlich näher kommen würde. Diese Idee lässt den Blick über ein weites noch unangebautes Feld schweifen, und ich bin

sehr befriedigt, wenn competente Richter mir zugestehen, einen practicabeln Weg hineingebaut zu haben.

Dabei kann ich mir nicht versagen, hier noch meine ganz besondere Freude darüber auszusprechen, dass derselbe Meister, der mich einst in die Pforten der Wissenschaft einführte, auch die beste Frucht meiner Studien in die Literatur eingeführt hat, indem er den ersten Theil dieser „Tetraedrometrie“ in Grunert's „Archiv für Mathematik“ Bd. XXXIX der Aufmerksamkeit der Wissenschaftsgenossen empfahl. Herr Professor Scherk hat dabei in einer mich hoch ehrenden Weise meines ehemaligen Schülerverhältnisses zu ihm gedacht, und wolle mir erlauben, dem allgemeinen Bilde dieses Verhältnisses Etwas von der Farbe zuzufügen, mit welcher es in mir leuchtet. In den längst vergangenen Tagen der Jugend, als ich in Halle vor dem begeisterten Lehrer sass, wenn die Lehrfreudigkeit, mit welcher er seine Jünger der geliebten Wissenschaft zuführte, seinem Vortrage eine Lebendigkeit verlieh, als wenn die Theoreme sich vor unseren Augen eben erst frisch in ihm entwickelten, — damals wünschte ich mir oft: es möchte mir beschieden sein, Ihm einmal eine Entdeckung vorlegen zu können, die Er als einen wesentlichen Schritt der Wissenschaft anerkennte. Das schien ein würdiger Dank zu sein. — Dieser alte Jugendtraum bekam wieder Leben, bei der Arbeit der letzten Jahre, wenn durch einen neuen Schritt die entdeckten Einzelheiten sich mehr und mehr organisch verbanden, wenn das Bild eines Systemes der Goniometrie dreier Dimensionen in mir bestimmtere Umrisse bekam. Wie war ich gespannt auf das Urtheil des verehrten Lehrers über das Ganze, und wie erfreut über den mit freundlicher Theilnahme beeilten schriftlichen Ausdruck seiner Anerkennung!

Dank Ihm für diese Freude, und Dank für jene Anregungen, die auch nach einem Menschenalter ihre Wärme noch nicht verloren haben!

Gotha, den 10. April 1863.

G. Junghann.

Nachtrag zu §. 77.

Der Umstand, dass dieses Vorwort nach dem Uebrigen gedruckt wird, bietet die Gelegenheit, hier noch einen Nachtrag zu §. 77 einzufügen, um daran zu erinnern, dass die Formel 116 die einfachsten Ausdrücke darbietet für die Seitenkräfte, in welche eine nach Grösse und Richtung gegebene Kraft nach drei gegebenen Richtungen zerlegt wird.

Bedeuten u, p, q die gesuchten Seitenkräfte, so sind ihre Werthe

$$u = \frac{P_1}{P_0} d, \qquad p = \frac{P_2}{P_0} d, \qquad q = \frac{P_3}{P_0} d, \text{ d. h.:}$$

$$u = \frac{P(dpq)}{P(upq)} d, \quad p = \frac{P(duq)}{P(upq)} d, \quad q = \frac{P(dup)}{P(upq)} d$$

bekannt, wenn die Ecken, welche ihre Richtungen unter sich und mit der Richtung der gegebenen Kraft d bilden, auf irgend eine Weise bestimmt sind. — Da der Natur der Sache nach die Richtung von d innerhalb der von den Seitenkräften u, p, q bestimmten Ecke liegt, so gelten für die P_0, P_1, P_2, P_3 und für die Winkel, welche die vier Kräfte mit einander bilden, alle die Gleichungen, welche im dritten und vierten Capitel für das Ekkensystem II. a gefunden sind, wodurch alle die Aufgaben, welche aus der oben ausgesprochenen durch Verwechselung der gegebenen und gesuchten Elemente hervorgehen, gelöst sind. — Die Resultirende von drei gegebenen Seitenkräften ist in der Formel 117, so wie auch in 116 ausgedrückt.

Inhalt.

	Seite
Vorwort	III
Neuntes Capitel. Das Parallelepipedon und die Transformation der Coordinaten im Raume	1
Zehntes Capitel. Vom Polar-Hexaeder	21
Elftes Capitel. Terminologie des Tetraeders, nebst einigen rein-geometrischen Beobachtungen	32
Zwölftes Capitel. Die Moduli des Tetraeders	42
Dreizehntes Capitel. Gleichungen für das Tetraeder, welche sich durch Anwendung der Moduln ergeben	66
Vierzehntes Capitel. Analyse von Carnot's „Mémoire sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace.“	76
Fünfzehntes Capitel. Allgemeine Gestalt und Behandlung einer Klasse tetraedrischer Gleichungen	134
Sechszehntes Capitel. Das Tetraeder zu berechnen aus dem Radius der umschriebenen Kugel und fünf von den sechs Winkeln, welche die vier nach den Eckpuncten gezogenen Radien bilden	145
Siebzehntes Capitel. Seien vier von einem Puncte im Raume ausgehende Strahlen der Lage nach gegeben, und auf ihnen vier bestimmte Längen; das Tetraeder zu berechnen, welches von den vier durch die Endpuncte der Strahlenstrecken auf diesen normal gelegten Ebnen gebildet wird	167

Neuntes Capitel.

Das Parallelepipedon und die Transformation der Coordinaten im Raume.

§. 76.

Fig. 75. Seien $OA = u$, $OB = p$, $OC = q$ drei vom Puncte O ausgehende, unter den Winkeln $BOC = a$, $AOC = b$, $AOB = c$ gegen einander geneigte gerade Linien, und das durch die Ecke O und ihre drei Kanten bestimmte Parallelepipedon $OABCO'A'B'C'$ vollendet. Auf einer um O gelegten Kugelfläche zeichnen die Seiten der Ecke O das sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$, und darin die Diagonalebene $OAO'A'$ den Bogen $\alpha\varepsilon$, worin wieder die Diagonale $OO' = d$ den Punct δ bestimmt. Die Bogen $\delta\alpha = a'$, $\delta\beta = b'$, $\delta\gamma = c'$ zerlegen das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in drei Theildreiecke, deren P-sinus bezeichnet werden:

$$P(\delta\beta\gamma) = P_1, \quad P(\delta\alpha\gamma) = P_2, \quad P(\delta\alpha\beta) = P_3$$

Diese Bezeichnungen entsprechen den in §. 15 gebrauchten P_0 bedeutet $P(\alpha\beta\gamma)$.

Es ist nun nach 10. a:

$$2P_0 = \sin a \sin(u, pq), \quad 2P_1 = \sin a \sin(d, pq)$$

also $P_0 : P_1 = \sin(u, pq) : \sin(d, pq)$

und wenn wir die von A oder O' auf die Ebne pq gefällte Höhe einstweilen mit h bezeichnen:

$$P_0 : P_1 = \frac{h}{u} : \frac{h}{d} = d : u$$

ebenso erhalten wir

$$P_0 : P_2 = d : p, \quad P_0 : P_3 = d : q$$

also überhaupt:

$$\frac{d}{P_0} = \frac{u}{P_1} = \frac{p}{P_2} = \frac{q}{P_3} \tag{116.}$$

Am Parallelepipedon verhalten sich eine Diagonale und die drei mit ihr in einem Puncte zusammenstos-

senden Kanten zu einander, wie die *P*-sinus der durch die je drei andern bestimmten Ecken.

Dieser Satz entspricht in durchgreifender Analogie dem planimetrischen:

Am Parallelogramm verhalten sich eine Diagonale und die beiden mit ihr in einem Puncte zusammenstossenden Seiten zu einander, wie die Sinus der durch die je beiden andern gebildeten Winkel.

§. 77.

Sind am Puncte O nach den Richtungen der Kanten u, p, q drei diesen Kanten proportionale Kräfte angebracht, so stellt bekanntlich die Diagonale OO' durch ihre Richtung und ihre Verhältnisse zu u, p, q die Richtung der Resultirenden und ihre Verhältnisse zu den Seitenkräften dar. Bringt man eine dieser Resultirenden gleiche Kraft im Angriffspuncte in entgegengesetzter Richtung an, so hält sie den Seitenkräften das Gleichgewicht. Die Ecken aber, welche diese neue Richtung mit den Richtungen der Seitenkräfte bestimmt, sind Nebenecken von denjenigen, welche die Richtung der Resultirendeu mit denselben bestimmt, und haben daher mit ihnen gleiche *P*-sinus (§. 5. 1). Daraus ergiebt sich der folgende Ausdruck für das Gesetz des Gleichgewichts von vier Kräften im Raum:

Vier an einem Puncte im Raume wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie sich verhalten, wie die *P*-sinus der gegenüberliegenden (durch die Richtungen der je drei andern Kräfte bestimmten) Ecken.

Bekannt ist der analoge Ausdruck für das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte:

Drei an einem Puncte in der Ebne wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie sich verhalten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

§. 78.

Es sollen nun die übrigen am Parallelepipedon vorkommenden Grössen durch die drei Kanten u, p, q und deren Winkel a, b, c ausgedrückt werden.

Dabei kann die Berechnung der an den Seitenparallelogrammen vorkommenden Grössen, ihrer Höhen, Flächeninhalte, Diagonalen u. s. w., welche der ebenen Trigonometrie angehört, als bekannt füglich übergangen werden.

Desgleichen die Berechnung der Flächenwinkel α, β, γ nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie. Es sei nur daran erinnert, dass für die Praxis am besten zuerst $2 P_0$ nach 2. a oder 3. a berechnet wird, und dann

$$\sin \alpha = \frac{2 P_0}{\sin b \sin c} \quad (1. \text{ a})$$

$$\Pi_0 = \frac{2 P_0^2}{\sin a \sin b \sin c} \quad (9. \text{ a})$$

$$M_0 = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{P_0}{\Pi_0} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2 P_0} \quad (8. \text{ b})$$

Der Inhalt des Parallelepipedons ist $2 upq P_0$ nach 11.

Die Neigungswinkel der Kanten u, p, q gegen die gegenüberliegenden Ebnen sind ausgedrückt durch

$$\sin(u, pq) = \frac{2 P_0}{\sin a}, \quad \sin(p, qu) = \frac{2 P_0}{\sin b}, \quad \sin(q, up) = \frac{2 P_0}{\sin c}$$

§. 79.

Die Diagonale $OO' = d$ kann durch Anwendung von Formeln der ebenen und der sphärischen Trigonometrie gefunden werden, einfacher jedoch auf tetraedrometrischem Wege:

Nach 28. a (in §. 25) ist

$$P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2 P_2 P_3 \cos a + 2 P_1 P_3 \cos b + 2 P_1 P_2 \operatorname{coc} c$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\frac{d_2}{P_0^2} = \frac{u^2}{P_1^2} = \frac{p^2}{P_2^2} = \frac{q^2}{P_3^2} = \frac{pq}{P_2 P_3} = \frac{uq}{P_1 P_3} = \frac{up}{P_1 P_2} \quad (116)$$

so wird

$$d^2 = u^2 + p^2 + q^2 + 2 pq \cos a + 2 uq \cos b + 2 up \cos c \quad (117.)$$

Die aus den andern Ecken gezogenen Diagonalen lassen sich nach derselben Formel berechnen, indem darin statt der Winkel a, b, c eintreten

für AA': $a, \pi - b, \pi - c$
» BB': $\pi - a, b, \pi - c$
» CC': $\pi - a, \pi - b, c$

Die P-sinus der Theilecken sind, nachdem d berechnet ist:

$$P_1 = \frac{u}{d} P_0, \quad P_2 = \frac{p}{d} P_0, \quad P_3 = \frac{q}{d} P_0 \quad (118.)$$

Die Neigungswinkel der Diagonale d gegen die Seitenebnen pq, uq, up:

$$\sin(d, pq) = \frac{2P_1}{\sin a} = \frac{u}{d} \cdot \frac{2P_0}{\sin a} \qquad (119.)$$

$$\sin(d, uq) = \frac{2P_2}{\sin b} = \frac{p}{d} \cdot \frac{2P_0}{\sin b}$$

$$\sin(d, up) = \frac{2P_3}{\sin c} = \frac{q}{d} \cdot \frac{2P_0}{\sin c}$$

Die Winkel der Diagonale mit den drei Kanten $(d, u) = a'$, $(d, p) = b'$, $(d, q) = c'$ nach 21. a:

$$\cos a' = \frac{P_1 + P_2 \cos c + P_3 \cos b}{P_0} \qquad (21.\text{ a})$$

$$\cos b' = \frac{P_1 \cos c + P_2 + P_3 \cos a}{P_0}$$

$$\cos c' = \frac{P_1 \cos b + P_2 \cos a + P_3}{P_0}$$

also nach 118:

$$\cos a' = \frac{u + p \cos c + q \cos b}{d} \qquad (120.)$$

$$\cos b' = \frac{u \cos c + p + q \cos a}{d}$$

$$\operatorname{coc} c' = \frac{u \cos b + p \cos a + q}{d}$$

Die ersten dieser Gleichungen (21. a) geben $\cos a' \ldots$ nur in Winkel- und Eckengrössen, sind also nur von der Form des Parallelepipedons abhängig. — Die zweiten lassen sich auch aus der Anschauung entnehmen. Denn es ist offenbar $u + p \cos c + q \cos b$ die Projection des gebrochenen Zuges $OA + AC' + C'O'$ anf die Richtung OA, und diese ist gleich der Projection der Geraden OO' auf dieselbe Richtung, d. h. gleich $d \cos a'$.

Addirt man die Gleichungen 120, uachdem man sie der Reihe nach mit u, p, q multiplicirt hat, so ergiebt sich vermöge 117 der bekannte Satz

$$u \cos a' + p \cos b' + q \cos c' = d \qquad (121.)$$

welcher nichts Anderes aussagt, als dass die Gerade OO' gleich ist der Projection des ihre Endpunkte verbindenden gebrochenen Zuges $OA + AC' + C'O'$ auf dieselbe.

Sucht man aus dem Ausdruck für $\cos a'$ in 120 den $\sin a' = \sqrt{1 - \cos^2 a'}$, so ergiebt sich

$$d \sin a' = \sqrt{\left\{ p^2 \sin^2 c + q^2 \sin^2 b + 2\,p\,q\,(\cos a - \cos b \cos c \right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{ p^2 \sin^2 c + q^2 \sin^2 b + 2\,p \sin c \,.\, q \sin b \,.\, \cos \alpha \right\}} \qquad (122.)$$

was sich auch rein trigonometrisch leicht ableiten lässt aus dem auf u normalen Querschnitte des Parallelepipedons, einem Parallelogramme, dessen zwei Seiten $p \sin c$ und $q \sin b$ und der eingeschlossene Winkel α sind, und dessen Diagonale $d \sin a'$ ist.

§. 80.

Zur Berechnung der drei Diagonalparallelogramme $OAO'A'$, $OBO'B'$, $OCO'C'$ sind nur ihre Winkel zu suchen, z. B. $< AOA'$ oder $\alpha\varepsilon$.

Für diesen Winkel hat man aus der zweiten Gleichung der Gruppe 24. a., nämlich der Ecken- und Seitengleichung für $\alpha\beta\gamma(\varepsilon)$ (§. 14.).

$$P_0 \cos(\alpha\varepsilon) = P(\alpha\beta\varepsilon) \cos b + P(\alpha\gamma\varepsilon) \cos c$$

Es ist aber nach 10. a:

$$2\,P_0 = \sin(u, p\,q) \sin a$$
$$2\,P(\alpha\beta\varepsilon) = \sin(u, p\,q) \sin(\beta\varepsilon)$$
$$2\,P(\alpha\gamma\varepsilon) = \sin(u, p\,q) \sin(\gamma\varepsilon)$$

also ist

$$\frac{\sin a}{P_0} = \frac{\sin(\beta\varepsilon)}{P(a\beta\varepsilon)} = \frac{\sin(\gamma\varepsilon)}{P(\alpha\gamma\varepsilon)}$$

Multipliciren wir die obige E.-S.-Gl. mit diesem Quotienten, so kommt

$$\sin a \cos(\alpha\varepsilon) = \sin(\beta\varepsilon) \cos b + \sin(\gamma\varepsilon) \cos c \qquad (123.)$$

Es geht aber aus jedem der ebaen Dreiecke OBA', OCA' hervor:

$$\frac{OA'}{\sin a} = \frac{q}{\sin(\beta\varepsilon)} = \frac{p}{\sin(\gamma\varepsilon)}$$

Durch Multiplication mit diesem Quotienten wird die letzte Gleichung:

$$OA' \cos(\alpha\varepsilon) = q \cos b + p \cos c$$

was wiederum nichts Anderes aussagt, als dass die Projection von OA' auf die Richtung von u gleich ist der Projection des Zuges $OC + CA'$ auf dieselbe Richtung. — Es ist also

$$\cos(\alpha\varepsilon) = \frac{q\cos b + p\cos e}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos a}} \qquad (124.)$$

woraus folgt

$$\sin(\alpha\varepsilon) = \sqrt{\frac{p^2\sin^2 c + q^2\sin^2 b + 2pq(\cos a - \cos b\cos c)}{p^2 + q^2 + 2pq\cos a}}$$

was nach 122 auch geschrieben werden kann (125.)

$$\sin(\alpha\varepsilon) = \frac{d\sin a'}{OA'}$$

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der Anschauung entnommen werden kann, da sowohl $\overline{OA'}\sin(\alpha\varepsilon)$ als $d\sin a'$ die Diagonale des auf u normalen Querschnittes des Parallelepipedons ausdrückt.

§. 81.

Die Winkel der der Ecke O gegenüberliegenden Diagonalparallelogramme $BCB'C'$, $ACA'C'$, $ABA'B'$, finden wir aus 124, indem wir statt der Ecke O eine der Ecken nehmen, welche von diesen Parallelogrammen durchschnitten werden, z. B. für das erste die Ecke C, deren Kanten ebenfalls u, p, q, deren Seitenwiukel aber $(pq) = \pi - a$, $(uq) = \pi - b$, $(up) = c$ sind. Setzen wir diese Werthe in 124 ein, so finden wir:

$$\cos BCB' = \frac{p\cos c - q\cos b}{\sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos a}} \qquad (126.)$$

und wenn wir die Diagonale BC mit l bezeichnen:

$$l\cos.(ul) = p\cos c - q\cos b \qquad (126.*)$$

Diese Gleichung spricht ein Resultat aus, das uns späterhin noch aus einem andern Gesichtspuncte von Wichtigkeit sein wird. Legen wir nämlich durch die Endpuncte von u, p, q, durch A, B, C eine Ebne, so schliesst diese in der Ecke O ein Tetraeder $OABC$ ab, in welchem OA oder u, und BC oder l zwei einander gegenüberliegende Kanten sind, deren Winkel also in der obigen Gleichuug einen einfachen Ansdruck findet.

Dieser Ausdruck kann übrigens auch unmittelbar aus der Anschauung entnommen werden. Denn denkt man sich durch die

Endpuncte von l: C und B, zwei Ebnen normal auf u gelegt, und von dem Durchschnittspuncte der ersteren mit u eine Parallele zu l bis an die zweite Ebene gezogen, so erkennt man das zwischen den beiden Ebnen gelegene Stück von u, also die Projection von l auf u, als $l \cos(ul)$. Dieselbe Linie ist aber augenscheinlich auch die Differenz der beiden Projectionen von $OB = p$ und $OC = q$ auf u, d. h.:

$$l \cos(ul) = p \cos c - q \cos b$$

§. 82.

Der Winkel, welchen eine Diagonalebene, z. B. $OAO'A'$ mit einer Seitenfläche, z. B. $OAC'B$ macht, also ein Winkel wie $\delta\alpha\beta$, wird berechnet nach:

$$\sin(\delta\alpha\beta) = \frac{2P_3}{\sin a' \sin c} = \frac{q}{d} \cdot \frac{2P_0}{\sin a' \sin c} \qquad (127.)$$

worin $\sin a'$ nach 122 auszudrücken ist. —

Der Winkel zweier Diagonalebnen z. B. $OBO'B'$ und $OCO'C'$ ist $\beta\delta\gamma$ und

$$\sin(\beta\delta\gamma) = \frac{2P_1}{\sin b' \sin c'} = \frac{u}{d} \cdot \frac{2P_0}{\sin b' \sin c'} \qquad (128.)$$

worin wieder $\sin b'$ und $\sin c'$ nach 122 zu ersetzen sind.

§. 83.

Durch den merkwürdigen Satz 116, wonach am Parallelepipedon

$$u = \frac{P_1}{P_0} d,\ p = \frac{P_2}{P_0} d,\ q = \frac{P_3}{P_0} d \qquad (116.*)$$

ist, lässt sich die Aufgabe der

Transformation der Coordinaten im Raume,

welche auf trigonometrischem Wege bekanntlich nur durch unerträglich weitschweifige und schwer zu übersehende Formeln ausführbar ist, auf ihre wahre tetraedrometrische Natur, und dadurch zu einer einfachen und eleganten Auflösung zurückführen.

Seien $+U$, $+P$, $+Q$ die positiven Axen eines schiefwinkligen Coordinaten-Sytems, d. h. diejenigen Axenhälften, auf denen die Coordinaten als positive Grössen gezählt werden. Die entgegengesetzten Axenrichtungen sollen mit $-U$, $-P$, $-Q$, bezeichnet werden, und die acht Ecken der Axen je nach den

Axenhälften, welche zu ihren Kanten gehören, mit „Axenecke $(+U, +P, +Q)$“ oder „Axenecke $(+U, -P, -Q)$“ u. s. w., die auf diese Axen bezogenen Coordinaten irgend eines Punctes mit u, p, q.

Denken wir uns durch die Endpuncte irgend einer Linie AB im Raume zwei Ebnen parallel zu einer der Axenebenen (etwa zu PQ) gelegt, so soll die zwischen denselben abgeschnittene Strecke der dritten (nicht in jener Ebne gelegenen) Axe (U) mit dem Ausdruck: „schiefe Projection der Linie AB auf die Axe U“ bezeichnet werden. — Geht die Linie AB vom Ursprunge der Coordinaten aus, so fallen ihre drei schiefen Projectionen zusammen mit den Coordinaten ihres Endpunctes.

§. 84.

Ohne Weiteres leuchtet nun Folgendes ein: Sind zwei Puncte im Raume A, B durch verschiedene gebrochene, aber nicht unterbrochene Linienzüge verbunden, so sind die algebraischen Summen der schiefen Projectionen der Glieder je eines Zuges auf eine der drei Axen einander gleich, und gleich der schiefen Projection der Geraden AB auf dieselbe Axe. — Denn verfolgt man auf einer der Axen die schiefen Projectionen der Glieder eines Zuges von der Projection des Punctes A aus, so gelangt man, sei es durch stetiges Fortschreiten, sei es durch Hin- und Zurückschreiten stets in ununterbrochenem Zuge zur Projection des Punctes B.

Es kommt darauf an die Bedingungen festzustellen, unter welchen die schiefen Projectionen eines gebrochenen Zuges auf einer Axe hin und zurück führen, also in ihrer algebraischen Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten.

Dabei können wir von der Erleichterung Gebrauch machen, dass wir im Folgenden uur mit solchen gebrochenen Zügen zu thun haben, die vom Ursprunge der Coordinaten aus durch drei gerade Linien zu irgend einem Puncte des Raumes führen.

Seien nun OA, OB, OC drei vom Ursprunge der Coordinaten ausgehende gerade Linien, und zwar alle drei in einer und derselben Axenecke, etwa in der Ecke $(-U, +P, +Q)$ gelegen. Ihre schiefen Projectionen auf die Axeu U, P, Q (oder die Coordinaten ihrer Endpuncte A, B, C) seien resp. u', p', q'; u'', p'', q'';

u''', p''', q'''. Es ist klar, dass in dem von uns beispielsweise angenommenen Falle die u', u'', u''' auf $-U$ liegen, die p', p'', p''' auf $+P$, die q', q'', q''' auf $+Q$.

Rücken wir nun die Linie OB sich selbst parallel fort, bis ihr Anfangspunct, (worunter ich hier und bei den andern Linien immer den ursprünglich in O liegenden Punct verstehe) mit A zusammenfällt, so rücken die schiefen Projectionen von OB: u'', p'', q'', ohne Aenderung ihrer Grösse in den Axen $-U$, $+P$, $+Q$ so weit fort, dass ihre Anfangspuncte in die Endpuncte von u', p', q' fallen; rücken wir dann ferner OC parallel mit sich fort, bis ihr Anfangspunct in B fällt, so rücken die schiefen Projectionen u''', p''', q''' in den Axen mit ihren Anfangspuncten an die Endpuncte von u'', p'', q''. — Wir erhalten somit aus den drei Geraden OA, OB, OC den zusammenhangenden Zug $OA + AB + BC$, und als Coordinaten des Endpunctes C die Längen

$$u' + u'' + u''' \text{ auf } -U$$
$$p' + p'' + p''' \text{ auf } +P$$
$$q' + q'' + q''' \text{ auf } +Q.$$

Dabei ist einleuchtend, dass diese Coordinaten dieselben bleiben, wenn die drei Glieder OA, OB, OC in anderer Aufeinanderfolge zu einem Zuge vereinigt werden. Solcher Folgen sind sechs verschiedene möglich, aber alle führen zu einem und demselben Endpuncte, nämlich zu dem (dem Puncte O gegenüberliegenden) Eckpuncte des Parallelepipedons, welches durch OA, OB, OC in ihren ursprünglichen Lagen bestimmt wird.

Liegen nun die ursprünglich gegebenen drei Linien OA, OB, OC nicht in einer und derselben Axenecke, sondern etwa OA in der Ecke $(+U, +P, +Q)$, während OB und OC, wie vorher, in der Ecke $(-U, +P, +Q)$ liegen, so fällt offenbar die Projection u' auf $+U$, während u'' und u''' auf $-U$ fallen. Werden nun die drei Linien OA, OB, OC in der vorhin angegebenen Weise zu einem Zuge vereinigt, so schliesst sich u'' dem auf $+U$ liegenden u' von dessen Endpuncte aus in entgegengesetzter Richtung (gegen O zu) an, und in derselben Richtung u''' dem u'', woraus hervorgeht, dass die Projection der Diagonale OC auf U nun entweder in der Grösse $u' - u'' - u'''$ auf $+U$, oder in der Grösse $-u' + u'' + u'''$ auf $-U$ liegt, also der algebraische Werth der Ordinate u des Endpunctes C ist: $u' - u'' - u'''$,

Die andern Ordinaten desselben Punctes sind offenbar $p' + p'' + p'''$ (auf $+ P$) und $q' + q'' + q'''$ (auf $+ Q$).

In dieser Weise leuchtet ein, dass wenn drei (oder mehr) vom Ursprunge der Coordinaten in verschiedene Axenecken ragende gerade Linien durch paralleles Verschieben so in einen Zug vereinigt werden, dass jeder Anfangspunct (s. oben) mit dem Endpuncte der vorhergehenden zusammenfällt, dass dann die Coordinaten des letzten Endpunctes, d. i. die algebraischen Summen der schiefen Projectionen auf jede der drei Axen, in der Weise zusammengesetzt sind, dass das Vorzeichen jeder einzelnen Projection übereinstimmt mit dem Vorzeichen des zugehörigen Axentheils, welcher die Kante derjenigen Ecke ausmacht, in der die projicirte Linie vor ihrer Verbindung zu einem Zuge lag. — Wollen wir umgekehrt für einen gegebenen gebrochenen Zug die Vorzeichen der einzelnen Projectionen beurtheilen, aus welchen die Coordinaten des Endpunctes des Zuges zusammengesetzt sind, so haben wir nur uns die einzelnen Glieder des gebrochenen Zuges in paralleler Richtung mit ihren Anfangspuncten (d. h. mit den dem Urspruuge im Zuge zunächst gelegenen) an den Ursprung geschoben zu denken. Mit den Vorzeichen der Axenhälften, in deren Ecken die Geraden dann ragen, stimmen auch die Vorzeichen der zu den Coordinaten vereinigten Projectionen überein.

§. 85.

Um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, sei ein Punct A, der in Bezug auf das Axensystem U, P, Q durch die Coordinaten u, p, q bestimmt ist, für ein anderes Axensystem X, Y, Z, in dessen Axenecke $(+ X + Y + Z)$ er liegen möge, zu bestimmen. Die Gerade OA ist nun die Diagonale zweier Parallelepipeda, nämlich des durch u, p, q, und des durch x, y, z bestimmten. Es sollen u, p, q durch die schiefen Projectionen von x, y, z auf U, P, Q ausgedrückt werden.

Es seien

u', p', q'	die absoluten	von x auf U, P, Q
u'', p'', q''	Werthe der	» y » »
u''', p''', q'''	schiefen Projectionen	» z » »

Nun kommt es darauf an, in welchen Axenecken der U, P, Q die

neuen Axen $+X, +Y, +Z$ liegen. Liegen sie alle drei in der Ecke $(+U, +P, +Q)$, so ist

$$u = u' + u'' + u'''$$
$$p = p' + p'' + p'''$$
$$q = q' + q'' + q'''$$

Liegt aber z. B.

$+X$ in der Ecke $(+U, +P, +Q)$
$+Y$ » » » $(-U, +P, +Q)$
$+Z$ » » » $(-U, -P, +Q)$

so ist

$$u = u' - u'' - u'''$$
$$p = p' + p'' - p'''$$
$$q = q' + q'' + q'''$$

§. 86.

Seien u, p, q die Coordinaten eines Punctes A in Beziehung auf drei Axen U, P, Q, deren positive Seiten unter den Winkeln

$$PQ = a, \; UQ = b, \; UP = c$$

zu einander geneigt sind. Seien ferner x, y, z die Coordinaten desselben Punktes in Beziehung auf drei andere Axen X, Y, Z, welche denselben Anfangspunct O haben, und deren positive Hälften zunächst alle drei innerhalb der Ecke $(+U, +P, +Q)$ fallen mögen. Es seien die Winkel, welche die positiven zweiten Axen mit den positiven primitiven Axen bilden:

$$XU = a' \quad XP = b' \quad XQ = c'$$
$$YU = a'' \quad YP = b'' \quad YQ = c''$$
$$ZU = a''' \quad ZP = b''' \quad ZQ = c'''$$

Ferner bezeichnen wir die P-sinus der Ecken

$$P(UPQ) = P_0$$
$$P(XPQ) = P_1' \quad P(XUQ) = P_2' \quad P(XUP) = P_3'$$
$$P(YPQ) = P_1'' \quad P(YUQ) = P_2'' \quad P(YUP) = P_3''$$
$$P(ZPQ) = P_1''' \quad P(ZUQ) = P_2''' \quad P(ZUP) = P_3'''$$

Zur Erleichterung der Anschauung werde um den gemeinschaftlichen Anfangspunct O beider Axensysteme eine Kugelfläche gelegt, auf der sich die den genannten Winkeln entsprechenden Bogen abzeichnen, wie die Fig. 76 darstellt. Die Buchstaben U, P, Q, X, Y, Z bezeichnen darin die Puncte, in denen die Kugelfläche von den ebenso genannten Axen getroffen wird.

Denken wir uns nun nach dem einerseits durch u, p, q, anderseits durch x, y, z bestimmten Puncte A (den wir uns einstweilen innerhalb der Ecke $(+X, +Y, +Z)$ vorstellen wollen, so dass x, y, z positive Grössen sind) einen zusammenhangenden Zug der letzteren Coordinaten geführt, und durch jeden Endpunct derselben drei den Axenebnen PQ, UQ, UP garallele Ebenen gelegt, und bezeichnen wir die schiefen Projectionen der x, y, z auf U, P, Q, wie in §. 85, so haben wir

$$u = u' + u'' + u'''$$
$$p = p' + p'' + p'''$$
$$q = q' + q'' + q'''$$

Nun sind aber u', p', q' die Seitenkanten eines Parallelepipedons, dessen Diagonale x; u'', p'', q'' die Seitenkanten eines Parall., dessen Diagonale y; u''', p''', q''' die Seitenkanten eines Parall., dessen Diagonale z ist, also ist nach 116* (§. 83):

$$u' = \frac{P_1'}{P_0} x, \quad p' = \frac{P_2'}{P_0} x, \quad q' = \frac{P_3'}{P_0} x$$

$$u'' = \frac{P_1''}{P_0} y, \quad p'' = \frac{P_2''}{P_0} y, \quad q'' = \frac{P_3''}{P_0} y$$

$$u''' = \frac{P_1'''}{P_0} z, \quad p''' = \frac{P_2'''}{P_0} z, \quad q''' = \frac{P_3'''}{P_0} z$$

folglich:

$$u = \frac{P_1' x + P_1'' y + P_1''' z}{P_0} \tag{129.}$$

$$p = \frac{P_2' x + P_2'' y + P_2''' z}{P_0}$$

$$q = \frac{P_3' x + P_3'' y + P_3''' z}{P_0}$$

Dies sind die einfachen Formeln für den Uebergang von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme auf ein anderes, welches denselben Anfangspunct hat. Soll aber auch der Ursprung auf einen andern Punct verlegt werden, dessen Coordinaten in Beziehung auf das primitive System u_1, p_1, q_1 sind, so wird

$$u = u_1 + \frac{P_1' x + P_1'' y + P_1''' z}{P_0} \tag{130.}$$

$$p = p_1 + \frac{P_2' x + P_2'' y + P_2''' z}{P_0}$$

$$q = q_1 + \frac{P_3' x + P_3'' y + P_3''' z}{P_0}$$

oder, um diese wichtigen Formeln in allgemeinerer Gestalt, uud mit möglichst wenigen conventionellen Zeichen zu schreiben:

$$u = u_1 + \frac{x P(xpq) + y P(ypq) + z P(zpq)}{P(upq)} \qquad (130.^*)$$

$$p = p_1 + \frac{x P(xuq) + y P(yuq) + z P(zuq)}{P(upq)}$$

$$q = q_1 + \frac{x P(xup) + y P(yup) + z P(zup)}{P(upq)}$$

Anmerkung. Diese Formeln entsprechen auf das genaueste den Formeln für die Umwandlung der Coordinaten in der Ebne. Denn sind für zwei schiefwinklige Axensysteme in der Ebne u, p die Coordinaten eines Punctes im primitiven, x, y die Coordinaten desselben Punctes im neuen Systeme, und u_1, p_1 die Coordinaten des neuen Anfangspunctes, so ist bekanntlich:

$$u = u_1 + \frac{x \sin(xp) + y \sin(yp)}{\sin(up)}$$

$$p = p_1 + \frac{x \sin(xu) + y \sin(yu)}{\sin(up)}$$

§. 87.

Es ist der Mühe werth, mit den einfachen Gleichungen 130. die weitschweifigen und schwer zu übersehenden trigonometrischen Formeln zu vergleichen, mit denen man sich für die Coordinatenverwandlung bisher hat behelfen müssen, wie sie z. B. im Grunert'schen Supplement zu Klügel's mathematischem Wörterbuch, Art. „Coordinaten" Nr. 15. pag. 471 gefunden werden. Setzt man in die dortigen Formeln die auf pag. 470 stehenden Polynome für ihre Abkürzungssymbole A, B, C ein, und entwickelt den Zähler nach den Coeficienten von x, y, z, so findet man in der That Ausdrücke, welche mit den unsrigen 129 übereinstimmen, wenn man die letzteren in dieser Form schreibt:

$$u = \frac{4 P_0 P_1' x + 4 P_0 P_1'' y + P_0 P_1''' z}{4 P_0^2}$$

u. s. w.

und dann statt der Producte $4\,P_0 P_1'$ u. s. w. ihre nach 32. a (im ersten Theil der „Tetraedrometrie“) ausgedrückten Werthe, und statt $4\,P_0^2$ den nach 5. a ausgedrückten Werth setzt. — Auch für die folgenden Paragraphen wird dem Leser die Vergleichung der Nrn. 16. 17. 18 des angeführten Artikels empfohlen.

§. 88.

Neben den Gleichungen 130 bestehen nun noch für die P-sinus der neun Ecken und die Cosinus der neun Winkel, welche die neuen Axen mit den primitiven bilden, die folgenden Gleichungen (21. a)

$$-P_0 + P_1' \cos a' + P_2' \cos b' + P_3' \cos c' = o \quad (131.\ a.\ b.\ c.)$$
$$-P_0 \cos a' + P_1' + P_2' \cos c + P_3' \cos b = o$$
$$-P_0 \cos b' + P_1' \cos c + P_2' + P_3' \cos a = o$$
$$-P_0 \cos c' + P_1' \cos b + P_2' \cos a + P_3' = o$$

und dieselbe Gruppe für P_1'', P_2'', P_3'', $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$ so wie für P_1''', P_2''', P_3''', $\cos a'''$, $\cos b'''$, $\cos c'''$.

Aus jeder dieser Gruppen können die drei Cosinus der mit Accenten bezeichneten Winkel eliminirt werden, woraus für jede Gruppe der accentuirten P-sinus die Gleichung hervorgeht:

$$P_0^2 = P_1'^2 + P_2'^2 + P_3'^2 + 2\,P_2' P_3' \cos a \quad (132.\ a.\ b.\ c.)$$
$$+ 2\,P_1' P_3' \cos b + 2\,P_1' P_2' \cos c$$

Ferner kann man aus jeder der drei Gruppen die vier P-sinus eliminiren, woraus dann für $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$ und ebenso für $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$ und für $\cos a'''$, $\cos b'''$, $\cos c'''$ die Bedingungsgleichung hervorgeht (34. a)

$$1 = \cos^2 a + \cos^2 a' - 2 \cos a \cos b' \cos c' \quad (133.\ a.\ b.\ c.)$$
$$+ \cos^2 b + \cos^2 b' - 2 \cos a' \cos b \cos c'$$
$$+ \cos^2 c + \cos^2 c' - 2 \cos a' \cos b' \cos c$$
$$- 2 \cos a \cos b \cos c$$
$$- \cos^2 a \cos^2 a' + 2 \cos b \cos b' \cos c \cos c'$$
$$- \cos^2 b \cos^2 b' + 2 \cos a \cos a' \cos c \cos c'$$
$$- \cos^2 c \cos^2 c' + 2 \cos a \cos a' \cos b \cos b'$$

woraus dann weiter folgt, dass, wenn die Winkel a, b, c mit dem primitiven Systeme gegeben sind, die je drei Winkel a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''' nicht von einander unabhängig sind, son-

dern aus jeder Gruppe nur zwei willkürlich gegeben werden können. (Vergl. den citirten Artikel im „mathemat. Wörterb." Nr. 16. 17.)

Sind nun aber aus jeder der obigen Gruppen nur zwei Winkel, z. B. aus der ersten b', c' gegeben, so ergiebt sich der dritte a' aus der Gleichung 32. a:

$$\cos a' = \frac{1}{\sin^2 a}\left\{\begin{array}{l}\cos b\cos c' + \cos b'\cos c - \cos a\,(\cos b\cos b' \\ \qquad + \cos c\cos c') + 4\,P_0 P_1\end{array}\right\} \quad (134).$$

welche die für $\cos a'$ aufgelöste Gleichung 133. a ist, und in welcher das Vorzeichen des irrationalen Theiles $4\,P_0 P_1$ nach §. 18 und §. 19 bestimmt ist.

Diese Auflösungen der Gleichungen 133 scheinen in der bisherigen Literatur noch nicht vorhanden zu sein.

§. 89.

Die Winkel der neuen Axen (YZ), (XZ), (XY) werden sehr einfach nach den Gleichungen 50. a ausgedrückt, nach welchen schon in §. 56 der Winkel zweier in Beziehung auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bestimmten Geraden allgemein gefunden ist. Danach ist nämlich

$$\begin{aligned} P_0\cos(yz) &= P_1''\cos a''' + P_2''\cos b''' + P_3''\cos c''' \quad (135.)\\ &= P_1'''\cos a'' + P_2'''\cos b'' + P_3'''\cos c''\\ P_0\cos(xz) &= P_1'\cos a''' + P_2'\cos b''' + P_3'\cos c'''\\ &= P_1'''\cos a' + P_2'''\cos b' + P_3'''\cos c'\\ P_0\cos(xy) &= P_1'\cos a'' + P_2'\cos b'' + P_3'\cos c''\\ &= P_1''\cos a' + P_2''\cos b' + P_3''\cos c' \end{aligned}$$

(vergl. Grunert a. a. O. Nr. 18. pag. 474) woraus denn auch der P-sinus der Ecke des neuen Axensystems berechnet werden kann, nämlich:

$$\begin{aligned} 4\,P^2(xyz) = 1 &- \cos^2(yz) - \cos^2(xz) - \cos^2(xy) \quad (136.)\\ &+ 2\cos(yz)\cos(xz)\cos(xy). \end{aligned}$$

§. 90.

Bei der Entwickelung der Formeln 129 — 135 sind zwei Voraussetzungen gemacht, welche die Allgemeingültigkeit derselben beschränken, nämlich 1) dass die positiven Axen des neuen Coor-

dinatensystems, X, Y, Z innerhalb der Ecke der positiven Axen des primitiven Systems U, P, Q liegen; 2) dass der Punct, dessen Coordinaten im alten Systeme u, p, q, im neuen x, y, z sind, in der Ecke der positiven X, Y, Z liege. Wir lassen einstweilen die zweite Voraussetzung bestehen, um zunächst zu untersuchen, welchen Einfluss das Fallenlassen der ersten auf die Formeln habe.

Dies ist im Grunde schon durch die Auseinandersetzung in §. 84 und §. 85 entschieden. Denn da die Glieder in den Ausdrücken 129 für u, p, q nichts Anderes sind, als die schiefen Projectionen der Coordinaten x, y, z auf die Axen U, P, Q, so stimmt das Vorzeichen jedes Gliedes überein mit dem Vorzeichen des Axentheiles, auf den diese Projection fällt, wenn x, y, z vom Anfangspuncte aus auf X, Y, Z aufgetragen gedacht wird, d. h. mit dem Vorzeichen des Axentheiles, der in derjenigen Ecke, in welcher die $+X$, resp. $+Y$ oder $+Z$ liegt, Kante ist. So sind für das letzte in §. 85 angenommene Beispiel die Formeln 129 mit folgender Veränderung der Vorzeichen zu schreiben:

$$u = \frac{P_1' x - P_1'' y - P_1''' z}{P_0}$$

$$p = \frac{P_2' x + P_2'' y - P_2''' z}{P_0}$$

$$q = \frac{P_3' x + P_3'' y + P_3''' z}{P_0}$$

§. 91.

Die Vorzeichen der einzelnen Glieder in den Ausdrücken 129 für u, p, q hangen also ab von der Lage der neuen Axen in Beziehung auf die primitiven, d. h. von der Lage der Ecken, welche die neuen Axen mit den primitiven bilden, in Beziehung auf die Ecke der primitiven. Daher lässt sich die Frage auch noch aus einem andern Gesichtspunkte auffassen und beantworten.

Wir haben gesehen, dass für die in 129 und 130 vorkommenden P-sinus auch noch die 12 Gleichungen 131. a. b. c. bestehen. Diese Gleichungen aber gelten nach dem Satze *A.* a in §. 23. für den Fall, dass die Axen $+X$, $+Y$, $+Z$ alle drei innerhalb der Ecke $(+U, +P, +Q)$ liegen, in welchem Falle nämlich die je drei Ecken, welche sie mit $+U$, $+P$, $+Q$ bestimmen, gleichliegend sind mit der Ecke $(+U, +P, +Q)$

(§. 20). Zunächst in diesen Gleichungen 131 nun bekommen aber nach dem Satz *A.* a die P-sinus andere Vorzeichen, wenn die Lagen von X, Y, Z in Beziehung auf U, P, Q andere werden, und da sie in der Gleichung 129 nnd 130 dieselben sind, so muss dieselbe Veränderung der Vorzeichen auch hier eintreten. Liegt z. B. die Axe $+X$ in der Ecke $(-U, +P, +Q)$, (so dass die auf einer um den Ursprung O gelegten Kugelfläche abgezeichnete Figur nicht mehr durch Fig. 76, sondern durch Fig. 77. dargestellt wird): so muss nach §. 23. A. a, weil das Dreieck XPQ mit UPQ nicht mehr in der Gleichlage, sondern in der Gegenlage (§. 20) ist, der P_1' in 131, also auch in 129. 130 das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. — Für das letzte Beispiel in §. 85. stellt Fig. 78. die gegenseitige Lage der Axen dar, woraus wir sehen, dass YPQ, ZPQ, ZUQ aus der Gleichlage mit UPQ in die Gegenlage übergegangen sind, also P_1'', P_1''' und P_2''' ihre Vorzeichen ändern müssen.

Demnach sind die Formeln 129 bis 135 durch die folgende Regel zu ergänzen:

Die P-sinus aller von den neuen Axen mit den primitiven Axen bestimmten Ecken, welche mit der Ecke der primitiven positiven Axen in der Gleichlage sind, behalten die Vorzeichen, welche sie in den Formeln 129—135 haben, die P-sinus derjenigen Ecken, welche mit der Ecke $(+U, +P, +Q)$ in der Gegenlage sind, bekommen die entgegengesetzten Vorzeichen.

§. 92.

Die zweite der in §. 90. erwähnten Voraussetzungen, nämlich dass der durch die Coordinaten bestimmte Punct in der Ecke der positiven X, Y, Z liege, ist in §. 84 f. nur gemacht worden, um die geometrische Anschauung zu fixiren und zu erleichtern; ihr Wegfall verändert an den Formeln nichts, wenn man berücksichtigt, dass die Symbole x, y, z auch negative Werthe repräsentiren können (wogegen die in den Formeln vorkommenden P, da sie sämmtlich concaven Ecken angehören, an sich positive Zahlen bedeuten). Negative Werthe repräsentiren die x, y, z in der bekannten Weise, sobald der durch sie bestimmte Punkt nicht in der Ecke $(+X, +Y, +Z)$ liegt. — Um auch dies an einem

Beispiele zu veranschaulichen, knüpfen wir an den im vorigen §. betrachteten, durch Fig. 77. erläuterten Fall an, in welchem die Axen $+ Y$, $+ Z$ in der Ecke $(+ U, + P, + Q)$, die $+ X$ in der Ecke $(- U, + P, + Q)$ liegen, und der bestimmte Punkt in der Ecke $(+ X, + Y, + Z)$. Es ist dann

$$u = \frac{- P_1' x + P_1'' y + P_1''' z}{P_0}$$

worin das negative erste Glied $\frac{- P_1'}{P_0} x$ die auf $- U$ fallende Projection von x ist. Wenn nun aber der Punkt in der Ecke $(- X, + Y, + Z)$ liegt, so dass x auf $- X$ fällt, welches in der Ecke $(+ U, - P, - Q)$ liegt, so fällt die Projection von x auf $+ U$, und es ist anschaulich, dass das erste Glied von u, nämlich $- \frac{P_1'}{P_0} x$, positiv ist, was es nur durch einen negativen Werth von x sein kann.

§. 93.

Noch eine andere Voraussetzung ist in §. 86 f. stillschweigend gemacht, — im Grunde nur darum, weil in der bisherigen Literatur die Aufgabe der Coordinatenverwandlung stets unter dieser Voraussetzung behandelt gefunden wird: nämlich dass die Lage der neuen Axen bestimmt sei durch die Winkel, welche sie mit den primitiven Axeu bilden. Dieser beschränkenden Voraussetzung unterliegen aber unsere Formeln 130. keineswegs, welche vielmehr nur voraussetzen, dass die Ecken, welche die neuen Axen mit je zweien der primitiven bilden, auf irgend eine Art bestimmt seien. Diese Bestimmungsart kann sogar für jede der neuen Axen eine andere sein, da nach dem ersten Capitel aus jeder Bestimmung einer Ecke ihr P-sinus gefunden werden kann. — Sind also die Winkel $a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c'''$ gegeben, so sind für 129 und 130 die P-sinus nach der Formel 2. a oder 3. a, 4. a, 5. a zu berechnen. Sind aber die neuen Axen z. B. durch ihre Neigungswinkel gegen die Ebnen der primitiven Axen bestimmt, so sind in 130 die P-sinus nach 10. a zu ersetzen. Es seien, um dies Beispiel durchzuführen, die Neigungswinkel der X gegen die Ebnen PQ, UQ, UP mit η_1', η_2', η_3', die der Y gegen dieselben Ebnen mit η_1'', η_2'', η_3'', die der Z gegen diesel-

ben Ebnen mit η_1''', η_2''', η_3''' bezeichnet und die Neigungswinkel der U gegen PQ, der P gegen UQ, der Q gegen UP mit H_1, H_2, H_3, dann ist nach 10. a: $2P_1' = \sin a \sin \eta_1'$, $2P_1'' = \sin a \sin \eta_1''$, $2P_1''' = \sin a \sin \eta_1'''$, $2P_2' = \sin b \sin \eta_2'$ u. s. w. und endlich $2P_0 = \sin a \sin H_1 = \sin b \sin H_2 = \sin c \sin H_3$, also wird aus 130:

$$u = u_1 + \frac{x \sin \eta_1' + y \sin \eta_1'' + z \sin \eta_1'''}{\sin H_1} \qquad (137.)$$

$$p = p_1 + \frac{x \sin \eta_2' + y \sin \eta_2'' + z \sin \eta_2'''}{\sin H_2}$$

$$q = q_1 + \frac{x \sin \eta_3' + y \sin \eta_3'' + z \sin \eta_3'''}{\sin H_3}$$

Auch in diesem Falle können die Winkel η_1', η_2', η_3'; η_1'', η_2'', η_3''; η_1''', η_2''', η_3''' eben so wenig wie die a', b', c', a'' . ., a''' . . neben den gegebenen a, b, c alle willkürlich gegeben werden, sondern für jede Axe X, Y, Z nur zwei, weil, wie für die a' . . a'' . . a''' die Bedingungsgleichungen 133. a. b. c, so für die η_1' . ., η_1'' . ., η_1''' . . die Gleichung 45. b besteht, nach welcher ist;

$$4P_0^2 = \sin^2\eta_1' \sin^2 a + 2 \sin \eta_2' \sin \eta_3' \sin b \sin c \cos a \quad (138.\text{a.b.c.})$$
$$+ \sin^2\eta_2' \sin^2 b + 2 \sin \eta_1' \sin \eta_3' \sin a \sin c \cos b$$
$$+ \sin^2\eta_3' \sin^2 c + 2 \sin \eta_1' \sin \eta_2' \sin a \sin b \cos c$$

welche Gleichung noch einmal für η_1'', η_2'', η_3'' und noch einmal für η_1''', η_2''', η_3''' geschrieben zu denken ist.

§. 94.

Bei dem häufig in Anwendung kommenden Uebergange von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme zu einem schiefwinkligen hat man $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, und $2P_0 = 1$. Ferner ist $2P_1' = \sin a \sin \eta_1' = \sin \eta_1'$. Der Winkel η_1' aber, nämlich der Neigungswinkel der X gegen die Ebne PQ, ist das Complement von a', nämlich von dem Winkel der beiden Axen X, U. In dieser Weise findet sich:

$$2P_1' = \cos a' \quad 2P_1'' = \cos a'' \quad 2P_1''' = \cos a'''$$
$$2P_2' = \cos b' \quad 2P_2'' = \cos b'' \quad 2P_2''' = \cos b'''$$
$$2P_3' = \cos c' \quad 2P_3'' = \cos c'' \quad 2P_3''' = \cos c'''$$

also nach 129:

$$u = x\cos a' + y\cos a'' + z\cos a''' \qquad (139.)$$
$$p = x\cos b' + y\cos b'' + z\cos b'''$$
$$q = x\cos c' + y\cos c'' + z\cos c'''$$

und daneben erwachsen aus den Gleichungen 131. a. b. c die drei folgenden.

$$1 = \cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c' \qquad (140.)$$
$$1 = \cos^2 a'' + \cos^2 b'' + \cos^2 c''$$
$$1 = \cos^2 a''' + \cos^2 b''' + \cos^2 c'''$$

worauf für diesen Fall auch die Gleichungen 132 und 133. a. b. c hinauslaufen.

Endlich hat man aus 135:

$$\cos(yz) = \cos a''\cos a''' + \cos b''\cos b''' + \cos c''\cos c''' \qquad (141.)$$
$$\cos(xz) = \cos a'\cos a''' + \cos b'\cos b''' + \cos c'\cos c'''$$
$$\cos(xy) = \cos a'\cos a'' + \cos b'\cos b'' + \cos c'\cos c''.$$

Die in diesem §. entwickelten Gleichungen sind trigonometrischer Natur und allbekannt. Von Interesse ist hier nur ihre Herleitung aus den allgemeinen und eben so einfachen tetraedrometrischen Gleichungen.

Zehntes Capitel.

Vom Polar-Hexaeder.

§. 95.

Fig. 79. Sei $OUPQ$ eine Ecke, deren Seitenwinkel $POQ = a$, $UOQ = b$, $UOP = c$ heissen, und die beziehlich gegenüberliegenden Flächenwinkel α, β, γ. Von irgend einem Bestrahlungspuncte O_1 dieser Ecke (§. 6) seien auf ihre Seitenebenen die Normalen O_1U_1, O_1P_1, O_1Q_1 gefällt, und durch dieselben Ebenen gelegt, welche die der Ecke O conjugirte Polarecke O_1 bilden, und in den Kanten der ersteren die Puncte U, P, Q bestimmen. Die sechs Ebenen der beiden Ecken O und O_1 schliessen einen Körper ein, welchen ich „Polar-Hexaeder“ nenne. Von seinen acht Ecken mögen die beiden Polarecken bei O und O_1 die „Hauptecken“ heissen. — Die Seitenwinkel der Ecke O_1 bezeichnen wir: $P_1O_1Q_1 = a_1$, $U_1O_1Q_1 = b_1$, $U_1O_1P_1 = c_1$ die ihnen beziehlich gegenüberliegenden Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Es ist also

$$a + \alpha_1 = \alpha + a_1 = \pi$$
$$b + \beta_1 = \beta + b_1 = \pi$$
$$c + \gamma_1 = \gamma + c_1 = \pi.$$

Ueberhaupt sollen alle für die Ecke O gewählten Zeichen dieselbe Bedeutung für die Ecke O_1 haben, sobald sie mit dem angehängten Index versehen sind. Sind also P und Π die Eckensinus der Ecke O, so ist

$$P = \Pi_1, \quad \Pi = P_1.$$

Die Kantenlängen der Ecke O seien:

$$OU = u, \text{ also } O_1U_1 = u_1$$
$$OP = p, \quad O_1P_1 = p_1$$
$$OQ = q, \quad O_1Q_1 = q_1$$

Die Diagonale $OO' = r$ bestimmt in jeder der beiden Ecken drei Theilecken, deren P-sinus seien:

$$P(rpq) = {}^1P \quad \text{also} \quad P(rp_1q_1) = {}^1P_1$$
$$P(ruq) = {}^2P \qquad P(ru_1q_1) = {}^2P_1$$
$$P(rup) = {}^3P \qquad P(ru_1p_1) = {}^3P_1$$

die theilenden Winkel heissen:

$$(ru) = a' \quad \text{also} \quad (ru_1) = a_1'$$
$$(rp) = b' \qquad (rp_1) = b_1'$$
$$(rq) = c' \qquad (rq_1) = c_1'$$

die Neigungswinkel von r gegen die Seitenebenen:

$$(r, pq) = {}^1\eta \quad \text{also} \quad (r, p_1q_1) = {}^1\eta_1$$
$$(r, uq) = {}^2\eta \qquad (r, u_1q_1) = {}^2\eta_1$$
$$(r, up) = {}^3\eta \qquad (r, u_1p_1) = {}^3\eta_1$$

Es ist ohne Weiteres klar, das

$$a' + {}^1\eta_1 = {}^1\eta + a_1' = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$b' + {}^2\eta_1 = {}^2\eta + b_1' = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$c' + {}^3\eta_1 = {}_3\eta + c_1' = \tfrac{1}{2}\pi$$

§. 96.

Für jede der beiden Hauptecken ist nach 21. a (§. 15):

$$P = {}^1P\cos a' + {}^2P\cos b' + {}^3P\cos c'$$
$$P\cos a' = {}^1P + {}^2P\cos c + {}^3P\cos b$$
$$P\cos b' = {}^1P\cos c + {}^2P + {}^3P\cos a$$
$$P\cos c' = {}^1P\cos b + {}^2P\cos a + {}^3P$$

Nun ist nach 10. a: $2\,{}^1P = \sin a \sin \eta'$ u. s. w. also:

$$2P = \sin {}^1\eta \sin a \cos a' + \sin {}^2\eta \sin b \cos b' + \sin {}^3\eta \sin c \cos c' \qquad (142.)$$

$$2P\cos a' = \sin {}^1\eta \sin a + \sin {}^2\eta \sin b \cos c + \sin {}^3\eta \sin c \cos b$$
$$2P\cos b' = \sin {}^1\eta \sin a \cos c + \sin {}^2\eta \sin b + \sin {}^3\eta \sin c \cos a$$
$$2P\cos c' = \sin {}^1\eta \sin a \cos b + \sin {}^2\eta \sin b \cos a + \sin {}^3\eta \sin c \qquad (143.)$$

Diese Formeln gelten, so wie alle in diesem Paragraphen folgenden, eben so für die Ecke O_1 und sind daher noch einmal geschrieben zu denken mit Anhängung des für die Ecke O_1 bestimmten Index an jedes Winkelzeichen.

Dividirt man diese Gleichungen durch den Modulus $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{P}{\Pi}$, so erhält man:

$$2\,\Pi = \sin {}^1\eta \sin \alpha \cos a' + \sin {}^2\eta \sin \beta \cos b' + \sin {}^3\eta \sin \gamma \cos c' \quad (144.)$$

$$2\,\Pi \cos a' = \sin {}^1\eta \sin \alpha + \sin {}^2\eta \sin \beta \cos c + \sin {}^3\eta \sin \gamma \cos b$$
$$2\,\Pi \cos b' = \sin {}^1\eta \sin \alpha \cos c + \sin {}^2\eta \sin \beta + \sin {}^3\eta \sin \gamma \cos a$$
$$2\,\Pi \cos c' = \sin {}^1\eta \sin \alpha \cos b + \sin {}^2\eta \sin \beta \cos a + \sin {}^3\eta \cos \gamma \quad (145.)$$

deren drei letztern (145), wenn man darin

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

u. s. w. setzt, übergehen in:

$$2\,\Pi \sin \alpha \sin a' = \sin {}^1\eta \sin^2 \alpha + \sin {}^2\eta (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) + \sin {}^3\eta (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) \quad (146.)$$

$$2\,\Pi \sin \beta \cos b' = \sin {}^1\eta (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) + \sin {}^2\eta \sin^2 \beta + \sin {}^3\eta (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)$$

$$2\,\Pi \sin \gamma \cos c' = \sin {}^1\eta (\cos \beta + \cos \alpha \cos \beta) + \sin {}^2\eta (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) + \sin {}^3\eta \sin^2 \gamma$$

Da die beiden Ecken O und O_1 Polarecken zu einander sind, so kann man in 142 und 143 P mit Π_1, und a, b, c mit $\pi - \alpha_1$, $\pi - \beta_1$, $\pi - \gamma_1$ vertauschen. Dies ergiebt die Gleichungen:

$$2\,\Pi_1 = \sin {}^1\eta \sin \alpha_1 \cos a' + \sin {}^2\eta \sin \beta_1 \cos b' + \sin {}^3\eta \sin \gamma_1 \cos c'$$

$$2\,\Pi_1 \cos a' = \sin {}^1\eta \sin \alpha_1 - \sin {}^2\eta \sin \beta_1 \cos \gamma_1 - \sin {}^3\eta \sin \gamma_1 \cos \beta_1$$

u. s. w.

Um sie aber durchgängig mit den Bestimmungsstücken einer der beiden Ecken O oder O_1 zu schreiben, kann noch $\sin {}^1\eta$ mit $\cos a_1'$ und $\cos a'$ mit $\sin {}^1\eta_1$ u. s. w., also $\sin {}^1\eta \cos a'$ mit $\sin {}^1\eta_1 \cos a_1'$ u. s. w. vertauscht werden. Dies giebt:

$$2\,\Pi_1 = \sin {}^1\eta_1 \sin \alpha_1 \cos a_1' + \sin {}^2\eta_1 \sin \beta_1 \cos b_1' + \sin {}^3\eta_1 \sin \gamma_1 \cos c_1'$$

$$2\,\Pi_1 \sin {}^1\eta_1 = \sin \alpha_1 \cos a_1' - \sin \beta_1 \cos \gamma_1 \cos b_1' - \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \cos c_1'$$

u. s. w.

und wenn wir diese Gleichungen der Gleichförmigkeit halber auf die Ecke O beziehen, auf welche die vorigen bezogen sind, d. h.

wenn wir die unteren Indices weglassen:

$$2\,\Pi = \cos a' \sin {}^1\eta \sin\alpha + \cos b' \sin {}^2\eta \sin\beta + \cos c' \sin {}^3\eta \sin\gamma \quad (144.)$$

$$2\,\Pi \sin {}^1\eta = \cos a' \sin\alpha - \cos b' \sin\beta \cos\gamma - \cos c' \sin\gamma \cos\beta \quad (147.)$$

$$2\,\Pi \sin {}^2\eta = -\cos a' \sin\alpha \cos\gamma + \cos b' \sin\beta - \cos c' \sin\gamma \cos\alpha$$

$$2\,\Pi \sin {}^3\eta = -\cos a' \sin\alpha \cos\beta - \cos b' \sin\beta \cos\alpha + \cos c' \sin\gamma$$

deren erste mit der schon gefundenen Gleichung 144 übereinstimmt.

Multiplicirt man die Gleichungen 147 mit dem Modulus $\frac{P}{\Pi} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$, so kommt:

$$2\,P \sin {}^1\eta = \cos a' \sin a - \cos b' \sin b \cos\gamma - \cos c' \sin c \cos\beta \quad (148.)$$

$$2\,P \sin {}^2\eta = -\cos a' \sin a \cos\gamma + \cos b' \sin b - \cos c' \sin c \cos\alpha$$

$$2\,P \sin {}^3\eta = -\cos a' \sin a \cos\beta - \cos b' \sin b \cos\alpha + \cos c' \sin c$$

und wenn darin $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ u. s. w. gesetzt wird

$$2\,P \sin a \sin {}_1\eta = \cos a' \sin^2 a - \cos b' (\cos c - \cos a \cos b) - \cos c' (\cos b - \cos a \cos c)$$

$$2\,P \sin b \sin {}^2\eta = -\cos a' (\cos c - \cos a \cos b) + \cos b' \sin^2 a - \cos c' (\cos a - \cos b \cos c)$$

$$2\,P \sin c \sin {}^3\eta = -\cos a' (\cos b - \cos a \cos c) - \cos b' (\cos a - \cos b \cos c) + \cos c' \sin^2 c \quad (149.)$$

§. 97.

Nun ist, wie aus der Figur ohne Weiteres leicht erkannt wird,

$$\cos a' = \sin {}^1\eta_1 = \frac{u}{r} \qquad \sin {}^1\eta = \cos a_1' = \frac{u_1}{r}$$

$$\cos b' = \sin {}^2\eta_1 = \frac{p}{r} \qquad \sin {}^2\eta = \cos b_1' = \frac{p_1}{r}$$

$$\cos c' = \sin {}^3\eta_1 = \frac{q}{r} \qquad \sin {}^3\eta = \cos c_1' = \frac{q_1}{r}$$

also folgt aus 142 und 144:

$$2\,Pr^2 = uu_1 \sin a + pp_1 \sin b + qq_1 \sin c \qquad (150.)$$
$$2\,\Pi r^2 = uu_1 \sin \alpha + pp_1 \sin \beta + qq_1 \sin \gamma \qquad (151.)$$

so wie auch

$$2\,P_1 r^2 = uu_1 \sin a_1 + pp_1 \sin b_1 + qq_1 \sin c_1 \qquad (150.*)$$
$$2\,\Pi_1 r^2 = uu_1 \sin \alpha_1 + pp_1 \sin \beta_1 + qq_1 \sin \gamma_1 \qquad (251.*)$$

Das zweite Paar dieser Gleichungen spricht für die Ecke O_1 dasselbe aus, was das erste Paar für die Ecke O, enthält also keine neuen Lehrsätze, und ist darum nicht für sich numerirt. Nur um die späteren Anwendungen bequemer zu machen, sind die Sätze für beide Ecken ausgeschrieben.

Es folgt ferner aus 143:

$$2\,Pu = u_1 \sin a + p_1 \sin b \cos c + q_1 \sin c \cos b \qquad (152.)$$
$$2\,Pp = u_1 \sin a \cos c + p_1 \sin b + q_1 \sin c \cos a$$
$$2\,Pq = u_1 \sin a \cos b + p_1 \sin b \cos a + q_1 \sin c$$

aus 145:

$$2\,\Pi u = u_1 \sin \alpha + p_1 \sin \beta \cos c + q_1 \sin \gamma \cos b \qquad (153.)$$
$$2\,\Pi p = u_1 \sin \alpha \cos c + p_1 \sin \beta + q_1 \sin \gamma \cos a$$
$$2\,\Pi q = u_1 \sin \alpha \cos b + p_1 \sin \beta \cos a + q_1 \sin \gamma$$

aus 146:

$$2\,\Pi \sin \alpha \cdot u = u_1 \sin^2 \alpha + p_1 (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) + \qquad (154.)$$
$$q_1 (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma)$$
$$2\,\Pi \sin \beta \cdot p = u_1 (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) + p_1 \sin^2 \beta +$$
$$q_1 (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)$$
$$2\,\Pi \sin \gamma \cdot q = u_1 (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) + p_1 (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)$$
$$+ q_1 \sin^2 \alpha$$

aus 147:

$$2\,\Pi u_1 = \quad u \sin \alpha - p \sin \beta \cos \gamma - q \sin \gamma \cos \beta \qquad (155.)$$
$$2\,\Pi p_1 = -u \sin \alpha \cos \gamma + p \sin \beta - q \sin \gamma \cos \alpha$$
$$2\,\Pi q_1 = -u \sin \alpha \cos \beta - p \sin \beta \cos \alpha + q \sin \gamma$$

aus 148:

$$2\,Pu_1 = \quad u \sin a - p \sin b \cos \gamma - q \sin c \cos \beta \qquad (156.)$$
$$2\,Pp_1 = -u \sin a \cos \gamma + p \sin b - q \sin c \cos \alpha$$
$$2\,Pq_1 = -u \sin a \cos \beta - p \sin b \cos \alpha + q \sin c$$

aus 149:

$$2\,P \sin a \cdot u_1 = \quad u \sin^2 a - p (\cos c - \cos a \cos b) - \qquad (157.)$$
$$q (\cos b - \cos a \cos c)$$

$$2\,P\sin b\cdot p_1 = -u(\cos c - \cos a\cos b) + p\sin^2 b - q(\cos a - \cos b\cos c)$$

$$2\,P\sin c\cdot q_1 = -u(\cos b - \cos a\cos b) - p(\cos a - \cos b\cos c) + q\sin^2 c$$

und eben so:

$$2\,P_1 u_1 = u\sin a_1 + p\sin b_1\cos c_1 + q\sin c_1\cos b_1 \quad (152.^*)$$

$$2\,\Pi_1 u_1 = u\sin\alpha_1 + p\sin\beta_1\cos c_1 + q\sin\gamma_1\cos b_1 \quad (153.^*)$$

$$2\,\Pi_1\sin\alpha_1\,u_1 = u\sin^2\alpha_1 + p(\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_1) + q(\cos\beta_1\cos\alpha_1\cos\gamma_1) \quad (154.^*)$$

$$2\,\Pi_1 u = u_1\sin\alpha_1 - p_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 - q_1\sin\gamma_1\cos\beta_1 \quad (155.^*)$$

$$2\,P_1 u = u_1\sin\alpha_1 - p_1\sin b_1\cos\gamma_1 - q_1\sin c_1\cos\beta_1 \quad (156.^*)$$

$$2\,P_1\sin a_1\cdot u = u_1\sin^2 a_1 - p_1(\cos c_1 - \cos a_1\cos b_1) - q_1(\cos b_1 - \cos a_1\cos c_1) \quad (157.^*)$$

§. 98.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nun zwölf Ausdrücke für die Diagonale r durch je sechs Bestimmungsstücke entweder von der einen oder von der andern Hauptecke, oder durch drei von der einen und drei von der andern.

Addirt man die Gleichungen 152 nachdem man sie der Reihe nach mit $u_1\sin a$, $p_1\sin b$, $q_1\sin c$ multiplicirt hat, so erhält man vermöge 150

$$4\,P^2 r^2 = u_1^2\sin^2 a + 2\,p_1 q_1\sin b\sin c\cos a + p_1^2\sin^2 b + 2\,u_1 q_1\sin a\sin c\cos b + q_1^2\sin^2 c + 2\,u_1 p_1\sin a\sin b\cos c \quad (158.)$$

und eben so aus 152.*

$$4\,P_1^2 r^2 = u^2\sin^2 a_1 + 2\,pq\sin b_1\sin c_1\cos a_1 + p^2\sin^2 b_1 + 2\,uq\sin a_1\sin c_1\cos b_1 + q^2\sin^2 c_1 + 2\,up\sin a_1\sin b_1\cos c_1 \quad (158.^*)$$

Addirt man die Gleichungen 153, nachdem man sie der Reihe nach mit $u_1\sin\alpha$, $p_1\sin\beta$, $q_1\sin\gamma$ multiplicirt hat, so erhält man vermöge 151:

$$4\,\Pi^2 r^2 = u_1^2\sin^2\alpha + 2\,p_1 q_1\sin\beta\sin\gamma\cos a + p_1^2\sin^2\beta + 2\,u_1 q_1\sin\alpha\sin\gamma\cos b + q_1^2\sin^2\gamma + 2\,u_1 p_1\sin\alpha\sin\beta\cos c \quad (159.)$$

und eben so aus 153*:

$$4\,\Pi_1^2 r^2 = \quad u^2 \sin^2\alpha_1 + 2\,pq \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \cos a_1 \quad (159.^*)$$
$$+ p^2 \sin^2\beta_1 + 2\,uq \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \cos b_1$$
$$+ q^2 \sin^2\gamma_1 + 2\,uq \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \cos c_1$$

Addirt man die Gleichungen 154, nachdem man sie der Reihe nach mit u_1, p_1, q_1 multiplicirt hat, so wird vermöge 151:

$$4\,\Pi^2 r^2 = \quad u_1^2 \sin^2\alpha + 2\,p_1 q_1 (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) \quad (160.)$$
$$+ p_1^2 \sin^2\beta + 2\,u_1 q_1 (\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)$$
$$+ q_1^2 \sin^2\gamma + 2\,u_1 q_1 (\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)$$

und eben so aus 154*:

$$4\,\Pi_1^2 r^2 = \quad u^2 \sin^2\alpha_1 + 2\,pq (\cos\alpha_1 + \cos\beta_1\cos\gamma_1) \quad (160.^*)$$
$$+ p^2 \sin^2\beta_1 + 2\,uq (\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\gamma_1)$$
$$+ q^2 \sin^2\gamma_1 + 2\,up (\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_1)$$

Addirt man die Gleichungen 155, nachdem man sie der Reihe nach mit $u\sin\alpha$, $p\sin\beta$, $q\sin\gamma$ multiplicirt hat, so erhält man vermöge 151:

$$4\,\Pi^2 r^2 = \quad u^2 \sin^2\alpha - 2\,pq \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha \quad (161.)$$
$$+ p^2 \sin^2\beta - 2\,uq \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$$
$$+ q^2 \sin^2\gamma - 2\,up \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

Addirt man die Gleichungen 156, nachdem man sie der Reihe nach mit $u\sin a$, $p\sin b$, $q\sin c$ multiplicirt hat, so erhält man vermöge 150:

$$4\,P^2 r^2 = \quad u^2 \sin^2 a - 2\,pq \sin b \sin c \cos\alpha \quad (162.)$$
$$+ p^2 \sin^2 b - 2\,uq \sin a \sin c \cos\beta$$
$$+ q^2 \sin^2 c - 2\,up \sin a \sin b \cos\gamma$$

Addirt man endlich die Gleichungen 157, nachdem man sie der Reihe nach mit u, p, q multiplicirt hat, so erhält man vermöge 150:

$$4\,P^2 r^2 = \quad u^2 \sin^2 a - 2\,pq (\cos a - \cos b\cos c) \quad (163.)$$
$$+ p^2 \sin^2 b - 2\,uq (\cos b - \cos a\cos c)$$
$$+ q^2 \sin^2 c - 2\,up (\cos c - \cos a\cos b)$$

Zu den letzten drei Gleichungen gehörcn noch drei andere, die sich aber von ihnen durch nichts unterscheiden, als dass sämmtliche Grössenausdrücke, ausser r, mit dem Index versehen sind.

§. 99.

In dem besonderen Falle, dass die drei Kanten einer der beiden Hauptecken, etwa O_1, einander gleich sind, also $u_1 = p_1 = q_1$, ist $\frac{u_1}{r} = \frac{p_1}{r} = \frac{q_1}{r}$ der Cosinus des Winkels, den die Axe des der Ecke O_1 umschriebenen Kegels mit dessen Seite macht (für das entsprechende sphärische Dreieck der Cosinus des sphärischen Radius des umschriebenen Kreises) also nach der schon im siebenten Capitel eingeführten Bezeichnung: $\cos \varrho_1$. — Derselbe Quotient $\frac{u_1}{r} = \frac{p_1}{r} = \frac{q_1}{r}$ ist aber zugleich der Sinus des Winkels, den die Axe des der Ecke O eingeschriebenen Kegels mit dessen Seite macht (für das entsprechende sphärische Dreieck der Sinus des sphärischen Radius des eingeschriebenen Kreises), den wir im siebenten Capitel mit $\sin r$ bezeichnet haben. Also haben wir für $u_1 = p_1 = q_1$

$$\frac{u_1}{r} = \frac{p_1}{r} = \frac{q_1}{r}$$
$$= \cos a_1' = \cos b_1' = \cos c_1' = \cos \varrho_1$$
$$= \sin {}^1\eta = \sin {}^2\eta = \sin {}^3\eta = \sin r$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen der §§. 96 — 98 ein, so erhalten wir auch auf diesem Wege alle die Gleichungen, welche aus den Entwickelungen des siebenten und achten Capitels, so wie durch die geometrischen Betrachtungen der §§. 74 und 75 für die Radien der einem sphärischen Dreieck um- und eingeschriebenen Kreise schon gefunden worden sind.

§. 100.

Die in den vorigen §§. aufgestellten Formeln sind für die Berechnung vieler am Tetraeder vorkommenden Grössen von grossem Nutzen. Denn fällt man von irgend einem Puncte innerhalb oder ausserhalb des Tetraeders Normalen auf die vier Tetraederflächen, so bilden die durch sie gelegten Ebenen mit den vier Tetraederecken oder deren Nebenecken vier Polarhexaeder, deren Kanten und Winkel je nach der Lage des Punctes für das Tetraeder verschiedene Bedeutung haben. Dies wird in den folgenden Capiteln zur Anwendung kommen. — Nicht von solcher Be-

deutung ist der körperliche Inhalt des Polarhexaeders. Nur der Vollständigkeit wegen möge hier eine Aufgabe darüber Platz finden, nämlich:

Den Inhalt des Polarhexaeders auszudrücken durch die Kantenlängen und die Flächenwinkel einer der beiden Hauptecken.

Auflösung. Für das Viereck OPU_1Q mit zwei rechten Gegenwinkeln bei P und Q ist aus der ebenen Trigonometrie bekannt:

$$PU_1 = \frac{q - p\cos a}{\sin a}, \quad QU_1 = \frac{p - q\cos a}{\sin a}$$

also

$$2 \triangle OPU_1 = \frac{pq - p^2\cos a}{\sin a}, \quad 2 \triangle OQU_1 = \frac{pq - q^2\cos a}{\sin a}$$

und daher das Viereck

$$OPU_1Q = \frac{2pq - (p^2 + q^2)\cos a}{2\sin a}$$

also die vierseitige Pyramide O_1OPU_1Q, deren Höhe u_1 ist, gleich $\frac{1}{3}OPU_1Q \cdot u_1$ und nach 155:

$$\frac{1}{3}OPU_1Q \cdot u_1 = \left(\frac{2pq - (p^2 + q^2)\cos a}{6\sin a}\right) \left(\frac{u\sin\alpha - p\sin\beta\cos\gamma - q\sin\gamma\cos\beta}{2\Pi}\right)$$

$$\frac{1}{3}OQP_1U \cdot p_1 = \left(\frac{2uq - (u^2 + q^2)\cos b}{6\sin b}\right) \left(\frac{p\sin\beta - u\sin\alpha\cos\gamma - q\sin\gamma\cos\alpha}{2\Pi}\right)$$

$$\frac{1}{3}OPQ_1U \cdot q_1 = \left(\frac{2up - (u^2 + p^2)\cos c}{6\sin c}\right) \left(\frac{q\sin\gamma - u\sin\alpha\cos\beta - p\sin\beta\cos\alpha}{2\Pi}\right)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $12\,P\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 24\,\Pi^2$ (9. a), so erhält nach Aufhebung der Nenner die rechte Seite der ersten Gleichung den Factor $\sin\beta\sin\gamma$, die der zweiten Gleichung den Factor $\sin\alpha\sin\gamma$, die der dritten den Factor $\sin\alpha\sin\beta$, und es wird nach Addition der drei Gleichungen, wenn $\mathfrak{H}$ den Inhalt des Polarhexaeders bezeichnet:

$$24\,\Pi^2\,\mathfrak{H} = \sin\beta\sin\gamma\,(2\,pq - (p^2+q^2)\cos a)\;(u\sin\alpha - p\sin\beta\cos\gamma - q\sin\gamma\cos\beta)$$
$$+\sin\alpha\sin\gamma\,(2\,uq - (u^2+q^2)\cos b)\;(p\sin\beta - u\sin\alpha\cos\gamma - q\sin\gamma\cos\alpha)$$
$$+\sin\alpha\sin\beta\,(2\,up - (u^2+p^2)\cos c)\;(q\sin\gamma - u\sin\alpha\cos\beta - p\sin\beta\cos\alpha)$$

Entwickelt man dies, indem man $\cos a$ durch

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

ersetzt u. s. w., so erhält man:

$$24\,\Pi^2\,\mathfrak{H} = u^3\sin\alpha\,(2\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\,(\cos^2\beta + \cos^2\gamma)) \quad (164.)$$
$$+p^3\sin\beta\,(2\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\,(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma))$$
$$+q^3\sin\gamma\,(2\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta))$$
$$-3\,pq\sin\beta\sin\gamma\,(p\sin\beta\cos\gamma + q\sin\gamma\cos\beta)$$
$$-3\,uq\sin\alpha\sin\gamma\,(u\sin\alpha\cos\gamma + q\sin\gamma\cos\alpha)$$
$$-3\,up\sin\alpha\sin\beta\,(u\sin\alpha\cos\beta + p\sin\beta\cos\alpha)$$

§. 101.

Noch eine Beobachtung über das Polarhexaeder möge hier einstweilen als Curiosum aufbewahrt werden, obgleich mir noch keine Anwendung davon vorgekommen ist: dass nämlich das Polarhexaeder ein Analogon von dem hat, was wir im zwölften Capitel am Tetraeder unter dem Namen eines „Modulus“ behandeln werden.

Nach 152 ist

$$2\,Pu = u_1\sin a + p_1\sin b\cos c + q_1\sin c\cos b$$
$$2\,Pp = u_1\sin a\cos c + p_1\sin b + q_1\sin c\cos a$$

Multipliciren wir die erste mit $\cos a$, die zweite mit $\cos b$, so ergiebt die Subtraction:

$$2\,P\,(u\cos a - p\cos b) = u_1\sin a\,(\cos a - \cos b\cos c) - p_1\sin b\,(\cos b - \cos a\cos c)$$
$$= \sin a\sin b\sin c\,(u_1\cos\alpha - p_1\cos\beta)$$
$$\text{(nach 9. b)} \quad = \frac{2\,P^2}{\Pi}\,(-u_1\cos a_1 + p_1\cos b_1)$$

(weil nämlich $\alpha = \pi - a_1$, $\beta = \pi - b_1$ ist) also, da auch $P = \Pi_1$ ist:

$$u\,\Pi\cos a + u_1\,\Pi_1\cos a_1 = p\,\Pi\cos b + p_1\,\Pi_1\cos b_1 \quad (165.)$$
$$= q\,\Pi\cos c + q_1\,\Pi_1\cos c_1$$

Drückt man diese Grösse durch die Bestimmungsstücke einer der beiden Hauptecken aus, so erhält man:

$$u\,\Pi\cos a + u_1\,\Pi_1\cos a_1 = \Pi\,(u\,\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\gamma + p\,\mathrm{ctg}\,\alpha \quad (166.)$$
$$\mathrm{ctg}\,\gamma + q\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta)$$
$$= \Pi_1\,(u_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma_1 + p_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1$$
$$\mathrm{ctg}\,\gamma_1 + q_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1)$$

Elftes Capitel.

Terminologie des Tetraeders, nebst einigen reingeometrischen Beobachtungen.

---

§. 102.

Die Tetraedrometrie im engeren Sinne hat die Aufgabe, aus je sechs gegebenen Bestimmungsstücken eines Tetraeders jedes siebente zu finden, und zunächst ein System von Gleichungen aufzustellen, in denen je sieben (resp. sechs) Bestimmungsstücke des Tetraeders verbunden sind. Bei der grossen Menge schon von primären Bestimmungsstücken (Kanten, ebne Winkel, Flächenwinkel) und der unumgänglichen Hereinziehung noch vieler anderen secundären (z. B. Dreieckflächen, Ecken, Höhen, Radien der um- und eingeschriebenen Kugeln, Entfernungen ausgezeichneter Puncte sowohl von den Eckpuncten als von den Endflächen) ist es durchaus geboten, diese am Tetraeder vorkommenden Grössen in den Rechnungen unter ein für allemal bestimmten, ihnen unveränderlich angehörenden Symbolen zu führen, an die man sich so gewöhne, dass sie in der Vorstellung die mit ihnen bezeichneten Begriffe in der Weise repräsentiren, wie in jeder Wissenschaft, in jeder Kunst und jedem Handwerk die Termini technici dazu dienen, die Mittheilungen unter den Wissenden bequem und geläufig zu machen. Wie sehr eine sorgfältig gewählte und festgehaltene Zeichen-Terminologie das Verständniss der Rechnungen und Formeln erleichtert, ist ja bekannt genug, und bei der Nothwendigkeit, in die Rechnungen viele verschiedenartige Grössen einzuführen, ist die Verpflichtung des Autors, der geometrischen Phantasie des Lesers durch eine sorgfältige Auswahl der Symbole zu Hülfe zu kommen, um so grösser, als die bisherige Literatur

noch wenig Veranlassung gegeben hat, sich die einschlagenden geometrischen Vorstellungen geläufig zu machen.

§. 103.

Fig. 80 und 81. Auf vier Strahlen im Raume, die von einem Puncte K ausgehen, denke man sich die Strecken KO, KA, KB, KC bestimmt, und durch je drei der Puncte O, A, B, C eine Ebne gelegt. Diese vier Ebenen schliessen ein Tetraeder ein, welches mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet werde, so wie

mit r_0 r_1 r_2 r_3 die Strahlenstrecken KO, KA, KB, KC

» $\triangle_0$ $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ die ebenen Dreiecke ABC, OBC, OAC, OAB

» $\mathfrak{t}_0$ $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{t}_2$ $\mathfrak{t}_3$ die Tetraeder $KABC$, $KOBC$, $KOAC$, $KOAB$

» $\mathfrak{p}_0$ $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{p}_2$ $\mathfrak{p}_3$ dieselben Tetraeder, wenn $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$ ist

» h_0 h_1 h_2 h_3 die von O, A, B, C gefällten Höhen des $\mathfrak{T}$.

» d_0 d_1 d_2 d_3 die von K auf $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ gefällten Normalen

» ϱ_0 ϱ_1 ϱ_2 ϱ_3 die Radien der den $\triangle_0$ . . umschriebenen Kreise.

» l m n die Kanten BC, AC, AB (Seiten des $\triangle_0$)

» u p q die Kanten OA, OB, OC (Kanten der Ecke O)

» $\left.\begin{matrix} l' & m' & n' \\ u' & p' & q' \end{matrix}\right\}$ die von K auf $\left\{\begin{matrix} l & m & n \\ u & p & q \end{matrix}\right\}$ gefällten Normalen.

§. 104.

Werden nun durch je zwei der r_0, r_1, r_2, r_3, so wie durch je zwei der d_0, d_1, d_2, d_3 Ebnen gelegt, so haben wir drei Systeme von je vier Ecken in's Auge zu fassen:

1. Das System der vier Ecken des $\mathfrak{T}$.
2. Das System der vier Ecken um K, die durch d_0, d_1, d_2, d_3 bestimmt sind.
3. Das System der vier Ecken um K, die durch r_0, r_1, r_2, r_3 bestimmt sind.

Wir legen im Allgemeinen den Fall zu Grunde, dass die Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 vier Ecken um den Strahlpunct K (ein

System I. a. §. 7) bilden. Dann liegt K innerhalb des $\mathfrak{T}$, und auch die d_0, d_1, d_2, d_3 bilden ein System I. a. und die von K bestrahlten Tetraederecken sind die vier inneren, also ein System I. b (§. 9). — Die Fälle, in denen K eine andere Lage zum $\mathfrak{T}$ hat, sollen jedesmal im Anschluss an die für den Normalfall gewonnenen Resultate discutirt werden.

Die beiden ersten der genannten Eckensysteme sind einander conjugirt, und es lassen sich auf sie alle die Gleichungen, welche im dritten und vierten Capitel für die Systeme I. a. b entwickelt sind, ohne Weiteres anwenden. Wir bezeichnen daher ihre Bestimmungsstücke wie im ersten Theile, und haben nur für das dritte Eckensystem neue Zeichen zu suchen.

Wir bezeichnen also

mit	a	b	c	die Seiten der Ecke $(d_1 d_2 d_3)$:	$d_2 d_3$, $d_1 d_3$, $d_1 d_2$
»	a'	b'	c'	die Seitenwinkel	$d_0 d_1$, $d_0 d_2$, $d_0 d_3$
»	α	β	γ	die Keile der Ecke bei O:	$\triangle_2\triangle_3$, $\triangle_1\triangle_3$, $\triangle_1\triangle_2$
»	α'	β'	γ'	die an $\triangle_0$ anliegenden Keile	$\triangle_0\triangle_1$, $\triangle_0\triangle_2$, $\triangle_0\triangle_3$
»	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	die Seiten der Ecke $(r_1 r_2 r_3)$:	$r_2 r_3$, $r_1 r_3$, $r_1 r_2$
»	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{c}'$	die Seitenwinkel	$r_0 r_1$, $r_0 r_2$, $r_0 r_3$

Die Seitenwinkel der Tetraederecken, und die Flächenwinkel der beiden Eckensysteme um K werden sowohl in der Entwickelung, als auch im Ausdruck der wichtigsten Formeln viel weniger in Anwendung gebracht. Sie sollen mit signirten a, b, c; α, β, γ; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, bezeichnet werden, je nachdem sie den $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ resp. a, a', b, b', c, c', resp. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ gegenüberliegen, welchen Buchstaben dann die Indices $_{0, 1, 2, 3}$ angehängt werden je nach der Ecke, welcher sie angehören. Es bedeuten also

a_0,	b_0,	c_0	die	Seitenwinkel	der	Ecke O
a_1,	b_1,	c_1	»	»	»	» A
a_2,	b_2,	c_2	»	»	»	» B
a_3,	b_3,	c_3	»	»	»	» C

α_0,	β_0,	γ_0	die	Keile	der Ecke $d_1 d_2 d_3$
α_1,	β_1,	γ_1	»	»	» » $d_0 d_2 d_3$
α_2,	β_2,	γ_2	»	»	» » $d_0 d_1 d_3$
α_3,	β_3,	γ_3	»	»	» » $d_0 d_1 d_2$

$\mathfrak{A}_0$ $\mathfrak{B}_0$ $\mathfrak{C}_0$ die Keile der Ecke $r_1 r_2 r_3$
$\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$ » » » » $r_0 r_2 r_3$
$\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ » » » » $r_0 r_1 r_3$
$\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{B}_3$ $\mathfrak{C}_3$ » » » » $r_0 r_1 r_2$

Wo von den Seitenwinkeln nur einer Tetraederecke und den Keilen ihrer Polarecke die Rede ist, werden dazu immer a_0, b_0, c_0; α_0, β_0, γ_0 (die Seiten der Ecke O und die Keile ihrer Polarecke) gewählt werden. Eben so werden die Seiten und Winkel eines Tetraeder-Dreiecks durch l, m, n; a_1, b_2, c_3, (Seiten und Winkel von $\triangle_0$) repräsentirt, so wie die um eines der d herumliegenden Flächenwinkel durch α_1, β_2, γ_3 (die um d_0 herumliegenden,) und drei um eines der r herumliegende durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_3$ (die um r_0).

§. 105.

Die Eckenfunctionen der Ecken der drei Systeme werden mit denselben lateinischen und griechischen Buchstaben bezeichnet, welche im siebenten und achten Capitel dafür eingeführt sind. In jedem Systeme werden die Functionen der je vier Ecken durch die angehängten Indices $_{0,1,2,3}$ unterschieden. Für die drei verschiedenen Systeme aber sollen die Zeichen in der Art unterschieden werden, dass die gewohnten Zeichen für die Ecken des Tetraeders reservirt bleiben, dagegen ein wagerechter Strich über dem Buchstaben anzeigt, dass dieser dem Eckensysteme der d_0, d_1, d_2, d_3 angehört, zwei wagerechte Striche aber, dass der darunter stehende Buchstabe dem Eckensysteme der r_0, r_1, r_2, r_3 angehört. Es sind also die Functionenzeichen für die Ecken

des $\mathfrak{T}$	der $d_0 d_1 d_2 d_3$	der $r_0 r_1 r_2 r_3$
$s_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0)$	$\overline{s}_0 = \frac{1}{2}(a + b + c)$	$\mathfrak{s}_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})$
$s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1)$	$\overline{s}_1 = \frac{1}{2}(a + b' + c')$	$\mathfrak{s}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}')$
$s_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2 + c_2)$	$\overline{s}_2 = \frac{1}{2}(a' + b + c')$	$\mathfrak{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}')$
$s_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3 + c_3)$	$\overline{s}_3 = \frac{1}{2}(a' + b' + c)$	$\mathfrak{s}_3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c})$
$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$	$\overline{\sigma}_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0)$	$\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{C}_0)$
$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta' + \gamma')$	$\overline{\sigma}_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)$	$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1)$
$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta + \gamma')$	$\overline{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)$	$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2)$.
$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta' + \gamma)$	$\overline{\sigma}_3 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3)$	$\mathfrak{S}_3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3)$

$e_0 = \pi - s_0$	$\overline{e_0} = \pi - \overline{s_0}$	$\mathfrak{e}_0 = \pi - \mathfrak{f}_0$ (s. §. 2)
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
$\varepsilon_0 = \sigma_0 - \frac{1}{2}\pi$	$\overline{\varepsilon_0} = \overline{\sigma_0} - \frac{1}{2}\pi$	$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{S}_0 - \frac{1}{2}\pi$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
$\mathrm{tg}\, r_0$, $\mathrm{ctg}\, \varrho_0$	$\mathrm{tg}\, \overline{r_0}$, $\mathrm{ctg}\, \overline{\varrho_0}$	$\mathrm{tg}\, \mathfrak{r}_0$, $\mathrm{ctg}\, \mathfrak{R}_0$ (s. §. 66)
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
P_0, Π_0, M_0	$\overline{P_0}$, $\overline{\Pi_0}$, $\overline{M_0}$	$\overline{\overline{P_0}}$, $\overline{\overline{\Pi_0}}$, $\overline{\overline{M_0}}$ (s. §. 2 u. 3)
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
S_0, Σ_0	$\overline{S_0}$, $\overline{\Sigma_0}$	$\overline{\overline{S_0}}$, $\overline{\overline{\Sigma_0}}$ (s. §. 63)
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
C_0, Γ_0	$\overline{C_0}$, $\overline{\Gamma_0}$	$\overline{\overline{C_0}}$, $\overline{\overline{\Gamma_0}}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
F_0, Φ_0	$\overline{F_0}$, $\overline{\Phi_0}$	$\overline{\overline{F_0}}$, $\overline{\overline{\Phi_0}}$

§. 106.

Die Ecken je eines Systems werden durch die Kanten eines andern in je drei Theilecken zerlegt, z. B. die Ecke O durch r_0 in die Theilecken $r_0 p q$, $r_0 u q$, $r_0 u p$, die Ecke $d_1 d_2 d_3$ durch r_0 in die Theilecken $r_0 d_2 d_3$, $r_0 d_1 d_3$, $r_0 d_1 d_2$, die Ecke $r_1 r_2 r_3$ durch d_0 in die Theilecken $d_0 r_2 r_3$, $d_0 r_1 r_3$, $d_0 r_1 r_2$. — Die Ekkenfunctionen dieser Theilecken werden mit demselben Buchstaben bezeichnet, welcher der Function der getheilten Ecke angehört, und zwar durch obere Indices ^{1}, ^{2}, ^{3} kenntlich gemacht. Da nämlich jede Theilecke mit der Hauptecke eine der (verschieden signirten) Seiten a, b, c oder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gemein hat, so werden die zu der Hauptecke gehörigen Zeichen für die an a oder $\mathfrak{a}$, an b oder $\mathfrak{b}$, an c oder $\mathfrak{c}$ gelegenen Theilecken oben durch ^{1}, durch ^{2}, durch ^{3} unterschieden, so dass der untere Index jedesmal die getheilte Ecke, der obere die Theilecke kennzeichnet, z. B.

$$^3P_2 = P(r_2 p l),\ ^1P_3 = P(r_3 d_0 d_1),\ ^2P_1 = P(d_1 r_0 r_2)$$

Doch wird von dieser letzteren Signatur nur dann Gebrauch gemacht werden, wenn dadurch die Uebersicht der Formeln wirklich unterstützt wird. Für die Nennung einzelner Ecken wird die allgemeine Bezeichnung durch die drei Kanten vorbehalten.

§. 107.

Werden die Kanten l, m, n, u, p, q auf irgend eine Weise in zwei Theile getheilt (wobei die Theilungspuncte L, M, N, U, P, Q heissen sollen) wie z. B. durch die Ebne der d_0, d_1, d_2, d_3, so sollen die Theile durch die Buchstaben der ganzen Kanten mit angehängtem Index der Ecke, von der jeder ausgeht, bezeichnet werden. Es ist also immer

$$l = l_2 + l_3 \qquad u = u_0 + u_1$$
$$m = m_1 + m_3 \qquad p = p_0 + p_2$$
$$n = n_1 + n_2 \qquad q = q_0 + q_3$$

Sind $L, M, \ldots$ die Halbirungspuncte der Kanten, so ist demnach $l_2 = l_3 = \frac{1}{2}l$ u. s. w. Die Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten sollen bezeichnet werden

$$LU = g_1 \qquad MP = g_2 \qquad NQ = g_3$$

Da diese drei Linien, wie sich zeigen wird, sich im Schwerpuncte des Tetraeders schneiden, so mögen sie „Schwerdurchmesser“ genannt werden.

Mit f_1, f_2, f_3 werden die kleinsten Abstände je zweier Gegenkanten, l und u, m und p, n und q, bezeichnet.

§. 108.

Fig. 82. Legt man durch die Kante BC des Tetraeders $OABC$ eine Ebne parallel zu OA und durch A eine Ebne parallel zu OBC, so bilden beide Ebnen zusammen mit den Ebnen der Dreiecke $\triangle_2$ und $\triangle_3$ das dreiseitige Prisma $OBCAB'C'$. Dieses besteht aus dem $\mathfrak{T}$ und der vierseitigen Pyramide $ABCB'C'$, deren Basis, das Parallelogramm $BCB'C'$, zwei Gegenkanten l und u des $\mathfrak{T}$ zu Seiten hat, und zwar unter ihrem eignen Winkel (lu) zusammengesetzt. Der Inhalt dieses Parallelogramms ist also $lu \sin(lu)$. Wo für die Formeln noch ein besonderes Symbol für dieses und die beiden andern Parallelogramme derselben Art gebraucht wird, soll

$lu \sin(lu)$ mit $\square_1$
$mp \sin(mp)$ » $\square_2$
$nq \sin(nq)$ » $\square_3$

bezeichnet werden. — Die vierseitige Ecke an der Spitze der Pyramide $ABCB'C'$ vereinigt als Seiten die vier mit a_0, a_1, a_2, a_3

bezeichneten Seitenwinkel je einer Tetraederecke, und zwar die beiden ersten: $B'AC' = a_0$, $BAC = a_1$ als Gegenseiten, und $BAC' = a_2$, $B'AC = a_3$ als die andern Gegenseiten. Die Flächenwinkel der vierseitigen Ecke sind $\pi - \beta$ an AC', $\pi - \gamma$ an AB', $\pi - \beta'$ an AC, $\pi - \gamma'$ an AB. Die vier Nebenecken sind die Tetraederecken O und A (mit den Seiten a_0, a_1, als Gegenseiten der vierseitigen Ecke einander zugekehrt) und die den Tetraederecken B, C symmetrisch gleichen, mit den Seiten a_2, a_3, als den andern Gegenseiten der vierseitigen Ecke, einander zugekehrt. Die Scheitel α, α der ersteren Nebenecken liegen in der Kante OA, die Scheitel α', α' der andern in dem mit BC und $B'C'$ parallelen Durchschnitte der Ebnen BAC und $B'AC'$. Der Winkel dieser beiden Geraden OA und $\alpha'A\alpha'$ ist der Winkel (lu) zweier Gegenkanten des $\mathfrak{T}$. Ferner ist der Winkel $BAB = (nq)$, und $CAC' = (mp)$.

§. 109.

Das soeben betrachtete Eckensystem ist in Fig. 83 dargestellt, wie es sich auf einer um den Punct A gelegten Kugelfläche in sphärischen Dreiecken abzeichnet. Das sphärische Vierseit $BCGH$ in Fig. 83 entspricht der vierseitigen Ecke an der Spitze der Pyramide $ABCB'C'$ in Fig. 82, und seine vier Nebendreiecke entsprechen den vier Ecken des Tetraeders $\mathfrak{T}$. — Die vom Vierseit abgewandten Scheitel dieser Nebendreiecke: A, D, A', E, liegen in einem das ganze System abschliessenden grössten Kreise, welcher in Fig. 82 der Ebne der Geraden OA und $\alpha'A\alpha'$ entspricht. Die beiden Bogen AD, AE in Fig. 83 entsprechen den beiden Winkeln (lu), und die Diagonalen BG und CH den Winkeln (mp) und (nq). — Vergleichen wir nun Fig. 83 mit der Figur 22 des ersten Theiles, welche ebenfalls die den vier Tetraederecken entsprechenden sphärischen Dreiseite auf einer Halbkugel darstellt: so findet sich dort (Fig. 22) in $BCGH$ das Viereck der vier Seitenwinkel a_0, a_1, a_2, a_3 wieder. Diese Fig. 22 unterscheidet sich von der neuen Fig. 83 dadurch, dass in jener der Kreis $DGHE$ in die Ebne des Papieres gelegt ist, wodurch das Dreieck ABC in die Mitte der Figur kommt und das Viereck $BCGH$ an den Rand, in dieser aber der Kreis DAE in der Ebne des Papieres liegt, wodurch das Viereck $BCGH$ in

der Mitte erscheint, jenes Dreieck ABC aber am Rande. Wenn wir also, wie in Fig. 84 dargestellt ist, die Fig. 22 noch durch die grössten Halbkreise DAE, FBG, HCI ergänzen, welche die den Winkeln (ul) und $(\pi - ul)$, (pm) und $\pi - (pm)$, (qn) und $\pi - (qn)$ entsprechenden Bogen enthalten, so stellt diese merkwürdige Figur 84 von einem Tetraeder die vier Ecken, die sämmtlichen Winkel je zweier Flächen und die sämmtlichen Winkel je zweier Kanten auf einer Halbkugel vereinigt dar.

§. 110.

Von den sphärischen Vierecken der Seiten a_0, a_1, a_2, a_3; b_0, b_1, b_2, b_3; c_0, c_1, c_2, c_3, welche die Figur 84 in $BCGH$, $ACDI$, $ABEF$ zeigt, stellt die in §. 108 zu Fig. 82 beschriebene Construction nur das erste in der vierseitigen Ecke bei A dar. Die folgende Construction dagegen bringt Alles, was die Fig. 84 in sphärischen Figuren enthält, durch Eckensysteme zur Anschauung.

Fig. 85. Seien an dem Tetraeder $OABC$ die Puncte L, M, N, U, P, Q die Halbirungspuncte der Kanten l, m, n, u, p, q und mit einander durch gerade Linien verbunden. Dann ist

$$PN \# QM \# \tfrac{1}{2}u \qquad PQ \# MN \# \tfrac{1}{2}l$$
$$UN \# QL \# \tfrac{1}{2}p \qquad UQ \# LN \# \tfrac{1}{2}m$$
$$UM \# PL \# \tfrac{1}{2}q \qquad UP \# LM \# \tfrac{1}{2}n$$

Das Tetraeder ist zerlegt in vier einander congruente und dem $\mathfrak{T}$ ähnliche Tetraeder $OUPQ$, $UANM$, $PNBL$, $QMLC$ und ein Octaeder $LMNUPQ$, dessen drei Axen $LU = g_1$, $MP = g_2$, $NQ = g_3$ jede die Diagonale zweier Parallelogramme sind. Die Seiten dieser Parallelogramme sind je zwei halbe Gegenkanten des Tetraeders, und es gehört als Diagonale an

g_1	den Parallelogrammen	$UQLN$	und	$UPLM$
g_2	»	» $PQMN$	»	$UPLM$
g_3	»	» $PQMN$	»	$UQLN$

Daraus folgt durch einfachen Schluss, dass die Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten sich in einem Puncte (K) schneiden. — Dieser Punct ist aber auch der Schwerpunct von $\mathfrak{T}$. Denn offenbar ist die von O auf UPQ gefällte Höhe des Theiltetraeders $OUPQ$ gleich $\frac{1}{2}h_0$ und auch gleich dem Abstande der beiden Ebnen UPQ und ABC. Es ist aber leicht zu sehen, dass der Punct K in der Mitte dieses Abstandes, also

um $\frac{1}{4}h_0$ von $\triangle_0$ entfernt liegt. In dieser Weise erkennt man den Punct K als denjenigen, welcher von jeder Fläche des $\mathfrak{T}$ um ein Viertel der zugehörigen Höhe entfernt ist, und das ist bekanntlich der Schwerpunct.

§. 111.

An dem Octaeder $LMNUPQ$, welches zurückbleibt, wenn man das $\mathfrak{T}$ durch die Halbirungspuncte der Kanten enteckt, finden sich nun die am $\mathfrak{T}$ vorkommenden Bestimmungsstücke in anderer Gruppirung wieder.

Jedes der drei Diagonal-Parallelogramme

$$PQMN = \tfrac{1}{4} lu \sin(lu)$$
$$UQLN = \tfrac{1}{4} mp \sin(mp)$$
$$UPLM = \tfrac{1}{4} nq \sin(nq)$$

hat je zwei Gegenkanten unter ihrem Winkel verbunden, und theilt das Octaeder in je zwei vierseitige Pyramiden, deren gemeinsame Basis das Parallelogramm ist. Die Gipfelecken dieser Pyramiden vereinigen als Seitenwinkel je vier gleichnamige Seitenwinkel der vier Tetraederecken, und als Flächenwinkel die Supplemente der Flächenwinkel des $\mathfrak{T}$, in deren Ebnen jene Seitenwinkel liegen. Es enthalten nämlich die vierseitigen Ecken

bei U und L die Seiten a_0, a_1, a_2, a_3
die Diagonalwinkel (pm), (qn)
die Winkel $\pi-\beta$, $\pi-\gamma'$, $\pi-\beta'$, $\pi-\gamma$

bei P und M die Seiten b_0, b_1, b_2, b_3
die Diagonalwinkel (ul), (qn)
die Winkel $\pi-\alpha$, $\pi-\gamma'$, $\pi-\acute{\alpha}$, $\pi-\gamma$

bei Q und N die Seiten c_0, c_1, c_2, c_3
die Diagonalwinkel (ul), (pm)
die Winkel $\pi-\alpha$, $\pi-\beta'$, $\pi-\alpha'$, $\pi-\beta$.

Auf diese vierseitigen Ecken und auf die vierseitigen Pyramiden, deren Gipfel sie bilden, sind die Gleichungen 53. a. b. (§. 60) anwendbar.

Zwölftes Capitel.

Die Moduli des Tetraeders.

§. 112.

Wie wir im siebenten Capitel eine Anzahl von Functionen der dreiseitigen Ecke, d. h. gewisse Combinationen ihrer Bestimmungsstücke durch besondere Symbole ausgezeichnet, und die zwischen ihnen bestehenden Relationen ein für allemal aufgesucht haben, so macht sich auch bei den Untersuchungen über das Tetraeder das Bedürfniss geltend, gewisse Functionen desselben, d. h. Combinationen seiner Bestimmungsstücke mit besondern Symbolen zu bezeichnen, und ihre Relationen in Gleichungen auszudrücken, die dem Gedächtnisse eingeprägt die tetraedrischen Rechnungen ausserordentlich erleichtern.

Es ist schon in §. 1 erwähnt, dass für das ebne und sphärische Dreieck die Functionen $\frac{a}{\sin \alpha}$ und $\frac{\sin a}{\sin \alpha}$ mit dem Namen „Modulus“ ausgezeichnet worden sind. Das Characteristische dieser Functionen besteht darin:

1) Dass sie durch zwei Bestimmungsstücke des Dreiecks ausgedrückt sind, also durch weniger, als zur vollständigen Bestimmung des Dreiecks gehören, woraus folgt, dass ein gegebener Werth solches Modulus nicht einem Dreieck allein angehört, sondern einer Gruppe von Dreiecken, nämlich allen denjenigen, welche in einer Seite und deren Gegenwinkel übereinstimmen.

2) Dass sie auch für je ein und dasselbe Dreieck constant sind, wenn man ihre beiden Bestimmungsstücke durch zwei andere derselben Art ersetzt, die zu einander dieselbe Beziehung haben;

dass also im ebnen Dreieck $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ im sphärischen $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ ist.

3) Dass, wenn man sie durch drei Bestimmungsstücke ausdrückt, auch der Werth dieses Ausdrucks sich nicht ändert, wenn man die drei Bestimmungsstücke durch drei andere derselben Art, die zu einander in derselben Beziehung stehen, ersetzt, z. B.

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}}{\sin\beta},$$

was im Grunde schon in Nr. 2 liegt.

4) Dass, wenn man die Functionen durch drei gleichartige Bestimmungsstücke, z. B. durch die drei Seiten, ausdrückt, die unter 2) und 3) aufgeführten Eigenschaften dadurch zur Erscheinung kommen, dass der Ausdruck in Beziehung auf diese Bestimmungsstücke symmetrisch wird, und also durch Vertauschung derselben weder seinen Werth noch seine Form ändert. So ist z. B.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{abc}{2\triangle} = \frac{2abc}{\sqrt{(2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}$$

und im sphärischen Dreieck

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{2\sin a\sin b\sin c}{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c)}}$$

5) Auch dadurch kann die unter 2) und 3) ausgesprochene Eigenschaft zur Erscheinung kommen, dass die Function sich durch ein oder zwei Bestimmungsstücke ausdrücken lässt, welche am Dreieck nur einmal vorkommen, und also nicht sich mit andern gleichartigen vertauschen lassen. So ist im ebnen Dreieck $\frac{a}{\sin\alpha} = 2\varrho$ (gleich dem Durchmesser des umschriebenen Kreises) und im sphärischen $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{P}{\Pi}$.

Dies sind die Eigenschaften, welche den Moduln des ebnen und des sphärischen Dreiecks für trigonometrische Rechnungen viel Bedeutung geben. Wenn wir aber den Begriff: „Bestimmungsstücke eines Dreiecks“ nicht auf die Seiten und Winkel beschränken, so finden sich am ebnen und am sphärischen Dreieck noch manche andere Functionen, d. h. Combinationen von Be-

stimmungsstücken, welche jener Eigenschaften auch theilhaftig sind, und also, da wir eines Begriffsnamens für sie bedürfen, auch an dem Namen „Modulus“ theilnehmen mögen. Für das sphärische Dreieck sind solche Moduli die im siebenten Capitel unter dem allgemeinen Namen der „Eckenfunctionen“ behandelten Combinationen; für das ebene Dreieck werden wir einige aus der Analogie mit dem Tetraeder zu erwähnen Gelegenheit finden.

§. 113.

Zahlreicher nämlich und gewichtiger, als am ebnen und sphärischen Dreieck, machen sich dergleichen Combinationen von Bestimmungsstücken, welche die im vorigen § unter 1 — 5 aufgeführten Eigenschaften haben, am Tetraeder geltend. Bei der grossen Anzahl von Bestimmungsstücken, die in tetraedrische Rechnungen sich einführen lassen, und auch, die darin eingeführt werden müssen, und bei der Menge von Gliedern, über welche man, um die Gleichungen zu beherrschen, die Uebersicht festhalten muss, kann man der zusammenfassenden Symbole für oft wiederkehrende Combinationen gewisser Bestimmungsstücke gar nicht entbehren, so wie auch nicht einer guten Anzahl von vorher festgestellten Relationen zwischen denselben. Ein ähnliches Bedürfniss hat auch Lagrange in der (im Vorwort pag. XI) besprochenen Abhandlung zur Aufstellung der vierzehn Gleichungen zwischen gewissen wiederkehrenden Combinationen der neun Coordinaten dreier im Raume gegebener Puncte geführt. Da aber die Tetraedrometrie nicht die Coordinaten der Eckpuncte des Tetraeders, sondern dessen eigne Bestimmungsstücke unmittelbar verbindet, so sind die hier im Voraus aufzustellenden Relationen selbst specifisch tetraedrische Lehrsätze, nicht, wie die Lagrange'schen Gleichungen, allgemein algebraïsche.

Es finden sich also am Tetraeder zahlreiche Combinationen von zwei bis fünf Bestimmungsstücken, welche in Beziehung auf das Tetraeder dieselben Eigenschaften zeigen, die im vorigen §. an den Modulis der Dreiecke beobachtet sind. Dass ihrer mehr sind, als am Dreieck, lässt sich aus der so viel grösseren Anzahl von Bestimmungsstücken voraussetzen.

Fortan mögen folgende Begriffsbestimmungen festgehalten werden:

1) Ein „Modulus des Tetraeders“ heisst jede Combination von Bestimmungsstücken desselben, welche ihren Werth nicht ändert, wenn sämmtliche Bestimmungsstücke durch andere ihnen gleichartige, zu einander in derselben Beziehung stehende ersetzt werden (also wenn man die Indices der Bestimmungsstücke in gleicher Weise ändert).

2) „Gruppenform eines Modulus“ heisst jeder Ausdruck desselben, welcher weniger Bestimmungsstücke enthält, als zur vollständigen Bestimmung des Tetraeders gehören, also im Allgemeinen weniger als sechs Stücke, für diejenigen Moduln aber, die allein von der Form (nicht von der Grösse) des Tetraeders abhangen, weniger als fünf Winkel- oder Eckenfunctionen oder sonstige Verhältniss-Exponenten.

3) „Feste Form eines Modulus“ heisst jeder Ausdruck desselben, in welchem die Bestimmungsstücke nicht mit anderen gleichartigen vertauscht werden können, sei es, weil sämmtliche Stücke einer Art, welche am Tetraeder statt finden, symmetrisch darin combinirt sind, oder weil die in dem Ausdruck vorkommenden Stücke nur je einmal am Tetraeder vorhanden sind.

4) „Wandelform eines Modulus“ heisst jeder Ausdruck desselben, der nicht fest ist.

Es ist klar, dass jede wandelungsfähige Combination von zwei bis sechs, resp. bis fünf Bestimmungsstücken sofort als ein Modulus erkannt wird, sobald sie sich einem Ausdruck von fester Form gleich erweiset.

Es giebt feste und wandelbare Gruppenformen von Moduln, und wenn man einen Modulus durch sechs Bestimmungsstücke ausdrückt, die das Tetraeder vollständig bestimmen, so kann auch dieser Ausdruck je nach der Wahl der Bestimmungsstücke eine feste oder eine Wandelform haben.

§. 114.

Um die so eben festgestellten Begriffsbestimmungen, ehe wir weitergehen, durch schon Bekanntes zu erläutern, wollen wir an einigen Moduln (im weiteren Sinne) des ebnen und des sphärischen Dreiecks die verschiedenen Formen nachweisen. Wir wählen dazu vom ebnen Dreieck den Radius ϱ des umschriebenen Kreises, den Inhalt $\triangle$, und die Function $a \sin \beta \sin \gamma$, die mit v bezeichnet

werde. Diese letztere Function ist diejenige, in welche $2\,\Pi$ am sphärischen Dreieck übergeht, wenn dessen Kugelradius unendlich gross genommen wird. Weiterhin werden wir die dem v analoge Function des Tetraeders kennen lernen. Vom sphärischen Dreieck wählen wir den Modulus M und die beiden Eckensinus P und Π.

1) Gruppenformen jener Moduln sind: (wenn h_1, h_2, h_3 im ebnen Dreieck, H_1, H_2, H_3 im sphärischen die auf die Seiten a, b, c gefällten Höhen bezeichnen:

$$2\,\varrho = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{2\,\triangle}{v}$$

$$2\,\triangle = a\,h_1 = b\,h_2 = c\,h_3 = 2\,\varrho\,v$$

$$v = h_1 \sin\alpha = h_2 \sin\beta = h_3 \sin\gamma = \frac{\triangle}{\varrho}$$

$$M = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{P}{\Pi}$$

$$2\,P = \sin a \sin H_1 = \sin b \sin H_2 = \sin c \sin H_3 = \operatorname{tg} r \sin c$$

$$2\,\Pi = \sin\alpha \sin H_1 = \sin\beta \sin H_2 = \sin\gamma \sin H_3 = \operatorname{ctg}\varrho \sin\varepsilon$$

vgl. 68. a. b.

Von diesen Ausdrücken sind die je drei ersten Wandelformen, die je vierte feste Form.

2) Feste Formen, und dabei nicht Gruppenformen sind:

$$2\,\varrho = \frac{a\,b\,c}{2\,\triangle}$$

$$2\,\triangle = \sqrt{(2\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,a^2\,b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

$$= 4\,\varrho^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$v = 2\,\varrho \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$M = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2\,P} = \frac{2\,\Pi}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$$

$$2\,P = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)}$$

$$2\,\Pi = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$$

3) Wandelformen sind, ohne Gruppenformen zu sein:

$$2\,\varrho = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\sin\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$2\,\triangle = b\,c\sin\alpha$$

$$v = a\sin\beta\sin\gamma$$

$$M = \frac{\sqrt{1 - (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha)^2}}{\sin \alpha}$$

$$2P = \sin b \sin c \sin \alpha$$

$$2\Pi = \sin \beta \sin \gamma \sin a.$$

Die Moduli des Tetraeders.

§. 115.

Am Tetraeder $OABC$ (Fig. 80) ist $BC = l = 2\varrho_0 \sin a_1 = 2\varrho_1 \sin a_0$, also $\varrho_0 M_1 \sin \alpha = \varrho_1 M_0 \sin \alpha$, also $\varrho_0 M_1 = \varrho_1 M_0$ oder

$$\varrho_0 : \varrho_1 = M_0 : M_1$$

Am Tetraeder verhalten sich die 2ϱ-Moduli zweier Dreiecke wie die M-Moduli der gegenüberliegenden Ecken.

Daraus folgt:

$$\frac{2\varrho_0}{M_0} = \frac{2\varrho_1}{M_1} = \frac{2\varrho_2}{M_2} = \frac{2\varrho_3}{M_3} = \mu \qquad (167.)$$

Dieser Quotient ist also wieder ein Modulus des Tetraeders, der fortan mit μ bezeichnet werden soll. — Andere Formen desselben werden sich später ergeben.

Jeder M-Modulus einer Tetraeder-Ecke wird durch Multiplication mit μ in den 2ϱ-Modulus des gegenüberliegenden Dreiecks, und der letztere durch Division mit μ in den ersteren verwandelt.

§. 116.

An demselben Tetraeder ist die Kante AC oder $m = 2\varrho_0 \sin b_2 = \mu M_0 M_2 \sin \beta$, also

$$m = \mu M_0 M_2 \sin \beta, \text{ eben so:}$$

$$n = \mu M_0 M_3 \sin \gamma, \text{ und dazu}$$

$$\sin a_1 = M_1 \sin \alpha$$

also $m n \sin a_1 = \mu^2 M_0 M_1 M_2 M_3 \cdot M_0 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ oder nach 8. a:

$$2\triangle_0 = \mu^2 M_0 M_1 M_2 M_3 \cdot 2\Pi_0, \text{ also:}$$

$$\frac{\triangle_0}{\Pi_0} = \mu^2 M_0 M_1 M_2 M_3 = \mu^2 (M_0) \qquad (168.)$$

Das mit dem Index $_0$ versehene Zeichen einer Function, die am Tetraeder viermal (mit angehängten $_{0,\,1,\,2,\,3}$) vorkommt, soll eingeklammert, wie (M_0), hier und in der Folge das Product aller vier bezeichnen.

Aus der rechts stehenden festen Form geht hervor, dass

$$\frac{\triangle_0}{\Pi_0} = \frac{\triangle_1}{\Pi_1} = \frac{\triangle_2}{\Pi_2} = \frac{\triangle_3}{\Pi_3} = \mathfrak{M} \qquad (169.)$$

Am Tetraeder verhalten sich je zwei Seitendreiecke zu einander wie die Π-sinus der gegenüberliegenden Ecken.

Jede Tetraederfläche wird also durch Division mit $\mathfrak{M}$ in den Π-sinus der gegenüberliegenden Ecke, und jeder Π-sinus durch Multiplication mit $\mathfrak{M}$ in die gegenüberliegende Dreieckfläche verwandelt.

Dieser Tetraeder-Modulus $\mathfrak{M} = \frac{\triangle_0}{\Pi_0}$ entspricht dem Dreieck-Modulus $2\varrho = \frac{a}{\sin \alpha}$ in einer Weise, die fast schon allein hinreicht, der Function Π den Namen „Eckensinus“ aufzudrängen.

Die Analogie dieser beiden Moduln hat auch den Verfasser zuerst auf den Gedanken gebracht, den anderweitigen Analogieen der Functionen Π und Sinus nachzuspüren, und ihn dadurch zu der Entwickelung des Systemes geführt, dessen Darstellung der Inhalt dieses Buches ist.

Aus 168 und 167 gehen für diesen Modulus noch die Formen hervor:

$$\mathfrak{M} = 2\varrho_0 \cdot 2\varrho_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = 2\varrho_0 \cdot M_1 \cdot 2\varrho_2 \cdot M_3 = \text{etc.}$$

(170.) und

$$\mathfrak{M} = \frac{2\varrho_0 \cdot 2\varrho_1 \cdot 2\varrho_2 \cdot 2\varrho_3}{\mu^2} = \frac{(2\varrho_0)}{\mu^2} \qquad (171.)$$

§. 117.

Einen dem $\frac{\triangle_0}{\Pi_0}$ in mancher Beziehung entsprechenden Modulus hat auch das Gebilde eines vierstrahligen Eckensystems, wenn auf den vier Strahlen die Längen r_0, r_1, r_2, r_3 bestimmt, und deren

Endpuncte O, A, B, C durch Ebnen verbunden werden. Es ist dann nach der Formel 11:

$$3\,\mathfrak{t}_0 = r_1 r_2 r_3 \overline{\overline{P}}_0,\quad 3\,\mathfrak{t}_1 = r_0 r_2 r_3 \overline{\overline{P}}_1,\quad 3\,\mathfrak{t}_2 = r_0 r_1 r_3 \overline{\overline{P}}_2,\quad 3\,\mathfrak{t}_3 = r_0 r_1 r_2 \overline{\overline{P}}_3$$

also

$$\frac{3\,r_0\,\mathfrak{t}_0}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{3\,r_1\,\mathfrak{t}_1}{\overline{\overline{P}}_1} = \frac{3\,r_2\,\mathfrak{t}_2}{\overline{\overline{P}}_2} = \frac{3\,r_3\,\mathfrak{t}_3}{\overline{\overline{P}}_3} = r_0 r_1 r_2 r_3 = (r_0) \quad (172.)$$

ein Modulus, dessen Symbol (r_0) sein mag.

Für ein auf andere Weise (als durch jenes Strahlensystem) gegebenes Tetraeder ist aber dieser Modulus so lange ein unbestimmter, als die Lage des Strahlpunctes für r_0, r_1, r_2, r_3 nicht bestimmt ist. Man kann also diesen Modulus nicht zu den allgemeinen Moduln des Tetraeders rechnen.

Ist der Strahlpunct das Centrum der dem Tetraeder $OABC$ umschriebenen Kugel, also $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$, so ist

$$\frac{3\,\mathfrak{p}_0}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{3\,\mathfrak{p}_1}{\overline{\overline{P}}_1} = \frac{3\,\mathfrak{p}_2}{\overline{\overline{P}}_2} = \frac{3\,\mathfrak{p}_3}{\overline{\overline{P}}_3} = r^3 \quad (173.)$$

Dieser Modulus r^3 ist nun sowohl für das vierstrahlige Eckensystem, als auch für jedes gegebene Tetraeder ein bestimmter, da man sich auf den Strahlen des erstern stets gleiche Strecken bestimmen kann, und da jedes Tetraeder ein Centrum der umschriebenen Kugel hat.

§. 118.

Auch der Inhalt $\mathfrak{T}$ des Tetraeders gehört zu den Moduln, denn es ist bekanntlich:

$$3\,\mathfrak{T} = \triangle_0 h_0 = \triangle_1 h_1 = \triangle_2 h_2 = \triangle_3 h_3 \quad (174.)$$

wozu nach der Formel 11 noch die zweite Wandelform kommt:

$$3\,\mathfrak{T} = upq\,P_0 = umn\,P_1 = lpn\,P_2 = lmq\,P_3 \quad (175.)$$

Eine wichtige feste Form dieses Modulus ist die folgende:

Ziehen wir von einem beliebigen Puncte im Raume K die vier Geraden r_0, r_1, r_2, r_3 nach den Eckpuncten O, A, B, C und legen Ebnen hindurch, welche mit den $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ die Tetraeder $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ einschliessen, so ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3$$

wenn K im Innern des Tetraeders liegt.

Liegt dagegen K in einem Nebenraume des Tetraeders, etwa in dem an $\triangle_0$ gelegenen, so ist

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3$$

Liegt K in der Scheitelecke einer Tetraeder-Ecke, etwa in der bei O, so ist

$$\mathfrak{T} = t_0 - t_1 - t_2 - t_3$$

Liegt endlich K in einem Aussenkeilraume, etwa in dem an der Kante u, so ist

$$\mathfrak{T} = t_0 + t_1 - t_2 - t_3$$

Feuerbach im „Grundriss“ pag. 2 fasst diese Sätze so zusammen:

„Die algebraische Summe der Inhalte der fünf Pyramiden, welche fünf Punkte im Raume bestimmen, ist gleich Null.“

In diesem Satze, der nach unserer Bezeichnung durch $\mathfrak{T} + t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = o$ ausgedrückt wird, ist der Ausdruck: „algebraische Summe“ ein unbestimmter, insofern über die Vorzeichen der einzelnen Glieder nichts festgestellt ist. Er muss daher noch durch folgenden Zusatz ergänzt werden:

In dieser Summe haben je zwei Pyramiden, die von ihrer gemeinsamen Fläche aus auf einerlei Seite liegen, entgegengesetzte, und die von der gemeinsamen Fläche entgegengesetzt liegen, gleiche Vorzeichen.

Nun ist, wenn d_0, d_1, d_2, d_3 die von K auf $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ gefällten Normalen sind $3\,t_0 = \triangle_0 d_0$ u. s. w., also haben wir für die angegebenen verschiedenen Lagen des Punctes K:

$$\begin{aligned}
3\mathfrak{T} &= \quad \triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3 \\
3\mathfrak{T} &= -\triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3 \\
3\mathfrak{T} &= \quad \triangle_0 d_0 - \triangle_1 d_1 - \triangle_2 d_2 - \triangle_3 d_3 \\
3\mathfrak{T} &= \quad \triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 - \triangle_2 d_2 - \triangle_3 d_3
\end{aligned}$$

Man erkennt aus diesen vier Gleichungen, dass man sie füglich unter der Gestalt der ersten zusammenfassen kann, wenn man ihr die Bedingung hinzufügt, dass jedes d, welches von der Ebne aus, auf welcher es normal steht, auf einerlei Seite mit dem $\mathfrak{T}$ liegt, additiv; jedes d, welches mit dem $\mathfrak{T}$ auf entgegengesetzter Seite der zugehörigen $\mathfrak{T}$-fläche liegt, subtractiv zu nehmen sei.

Die algebraische Summe $\triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3$, mit dieser Bedingung für die Vorzeichen verstanden, möge hinfort durch $[\triangle' d]$ bezeichnet werden, wonach also allgemein ist

$$3\mathfrak{T} = [\triangle_0 d_0] \qquad (176.)$$

Es ist bemerkenswerth, dass die Summe $[\triangle d]$ für jeden beliebigen Punkt K constant ist. Liegt dieser Punkt in einer der Tetraederflächen, z. B. in $\triangle_0$, so ist das zugehörige $d_0 = 0$ und

$$3\mathfrak{T} = \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3;$$

liegt aber K in einem der Eckpunkte, z. B. in O, so sind die drei d Null, deren zugehörige $\triangle$ in dem Punkte zusammenstossen, also in diesem Falle $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ und $d_0 = h_0$, so dass also ist:

$$3\mathfrak{T} = [\triangle_0 d_0] = \triangle_0 h_0$$

§. 119.

Ist K der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, so ist, wenn d deren Radius bedeutet

$$3\mathfrak{T} = d(\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3) = d[\triangle_0] \qquad (177.)$$

Ausser dieser eingeschriebenen Kugel hat das Tetraeder im Allgemeinen noch sieben Berührungskugeln, d. h. solche, welche alle vier Flächen des $\mathfrak{T}$ berühren. Vier derselben haben ihre Mittelpunkte in den Aussenräumen des $\mathfrak{T}$. — Ist $\overset{o}{d}$ der Radius derjenigen Berührungskugel, die in dem an $\triangle_0$ gelegenen Aussenraume liegt, und daher $\triangle_0$ von aussen, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ von innen berührt, so ist

$$3\mathfrak{T} = \overset{o}{d}(-\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3)$$

Drei andere Berührungskugeln haben ihre Mittelpunkte in dreien von den sechs Aussenkeilräumen, welche an die sechs Kanten stossen. — Dass es solcher Berührungskugeln nur drei, und nicht sechs geben kann, lässt sich so übersehen:

Für einen Punkt K, der in dem an u gelegenen Aussenkeilraume liegt, ist, wie sich aus der Anschauung ergiebt,

$$3\mathfrak{T} = \triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 - \triangle_2 d_2 - \triangle_3 d_3$$

dagegen für einen Punkt, der in dem an l gelegenen Aussenkeilraume liegt, ist

$$3\mathfrak{T} = -\triangle_0 d_0 - \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3$$

In diesen beiden Gleichungen sind offenbar sowohl die $\triangle$, als auch die d, so wie $\mathfrak{T}$ absolute Grössen, die keine negativen Werthe haben können. Sollten nun in beiden Aussenkeilräumen

Berührungskugeln stattfinden, so müsste für die erste die Gleichung bestehen:

$$3\mathfrak{T} = \overset{u}{d}(\Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)$$

und zugleich für die zweite die Gleichung

$$3\mathfrak{T} = \overset{l}{d}(-\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$$

(worin $\overset{u}{d}$, $\overset{l}{d}$ die Halbmesser dieser Berührungskugeln bedeuten). Offenbar aber können beide Gleichungen nicht zugleich bestehen, weil in der einen von beiden entweder $3\mathfrak{T}$ oder $\overset{u}{d}$, resp. $\overset{l}{d}$ einen negativen Werth haben müsste, was ungereimt ist. Es geht daraus hervor, dass von jedem dieser Paare von Gleichungen

$$\begin{aligned}
\overset{u}{d}(\ \ \Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}\\
\overset{l}{d}(-\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}\\
\overset{p}{d}(\ \ \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}\\
\overset{m}{d}(-\Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}\\
\overset{q}{d}(\ \ \Delta_0 - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}\\
\overset{n}{d}(-\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3) &= 3\mathfrak{T}
\end{aligned}$$

nur eine stattfinden kann, nämlich diejenige, in welcher der Coefficient von d positiv ist.

Sollen nun etwa die je drei ersten Gleichungen dieser Paare bestehen, so muss sein

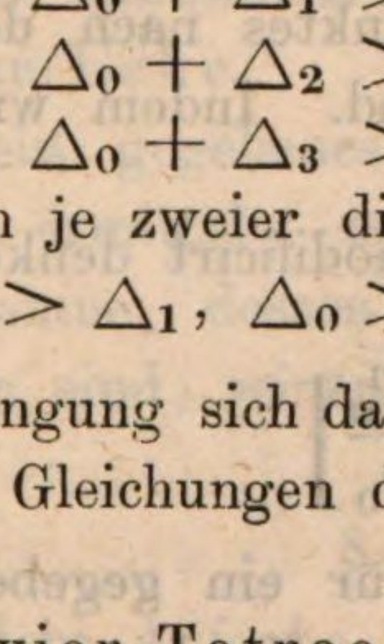
$$\begin{aligned}
\Delta_0 + \Delta_1 &> \Delta_2 + \Delta_3\\
\Delta_0 + \Delta_2 &> \Delta_1 + \Delta_3\\
\Delta_0 + \Delta_3 &> \Delta_1 + \Delta_2
\end{aligned}$$

Durch Addition je zweier dieser Ungleichungen folgt daraus

$$\Delta_0 > \Delta_1,\ \Delta_0 > \Delta_2,\ \Delta_0 > \Delta_3$$

unter welcher Bedingung sich dann die Werthe von $\overset{u}{d}$, $\overset{p}{d}$, $\overset{q}{d}$ aus den je drei ersten Gleichungen der obigen Paare ergeben. Daraus geht hervor:

Ist von den vier Tetraederflächen eine grösser als jede der drei übrigen, so finden in den Aussenkeilräumen an den Kanten der Gegenecke dieser grössten Fläche Berührungskugeln statt, an den drei anderen Kanten aber nicht.



4*

Beispiel $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 1$, $\Delta_4 = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}$

nicht umgekehrt

falsch.

Ist aber die Summe zweier Dreiecke gleich der Summe der beiden andern, z. B. $\triangle_0 + \triangle_1 = \triangle_2 + \triangle_3$, so wird $\overset{(u)}{d} = \overset{(l)}{d} = \infty$. In diesem Falle finden allerdings in den Aussenkeilräumen zweier Gegenkanten zugleich Berührungskugeln statt, aber beide von unendlich grossem Halbmesser, so dass sie nicht construirbar sind.

Wir können also die Gleichung 177 als allgemeingültig für alle acht Berührungskugeln, die ein Tetraeder haben kann, betrachten, wenn wir d als das allgemeine Symbol für den Halbmesser jeder dieser Berührungskugeln nehmen und die algebraische Summe $[\triangle]$ so verstehen, dass darin jedem $\triangle$, welches von der Berührungskugel auf einerlei Seite mit der eingeschriebenen Kugel berührt wird, das Zeichen $+$, jedem $\triangle$ aber, welches von der Berührungskugel und der eingeschriebenen Kugel auf entgegengesetzten Seiten berührt wird, das Zeichen $-$ zukomme, und dass nur diejenigen Werthe von $[\triangle]$ Gültigkeit haben, welche bei dieser Anordnung der Vorzeichen positiv werden.

§. 120.

Setzt man in die Gleichungen des §. 118: $t_0 = \frac{1}{3} r_1 r_2 r_3 \overline{P_0}$ u. s. w., so erhält man für $3\,\mathfrak{T}$ die neue Form:

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{(r_0)} = \frac{\overline{\overline{P_0}}}{r_0} + \frac{\overline{\overline{P_1}}}{r_1} + \frac{\overline{\overline{P_2}}}{r_2} + \frac{\overline{\overline{P_3}}}{r_3}$$

worin nach 172: $(r_0) = r_0 r_1 r_2 r_3$ ist, und die Vorzeichen der Glieder je nach der Lage des Punktes nach den vier in §. 118. dargelegten Fällen zu nehmen sind. Indem wir die algebraische Summe der $\frac{\overline{\overline{P}}}{r}$ in diesem Sinne modificirt denken, schreiben wir

$$\frac{[3\,\mathfrak{T}}{(r_0)} = \left[\frac{\overline{\overline{P_0}}}{r_0}\right] \qquad (178.)$$

Dieser Modulus ist wieder für ein gegebenes Tetraeder ein unbestimmter, so lange nicht über die Lage des Punktes K Bestimmung getroffen ist. Für den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel ist

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{r_3} = \overline{\overline{P_0}} + \overline{\overline{P_1}} + \overline{\overline{P_2}} + \overline{\overline{P_3}} = [P_0] \qquad (179.)$$

ein bestimmter Modulus des Tetraeders, in welcher Summe die Vorzeichen ebenfalls je nach der gegenseitigen Lage der $\mathfrak{T}$, t_0, t_1, t_2, t_3 zu nehmen sind.

§. 121.

Dividirt man die Gleichung 174 durch $\mathfrak{M} = \frac{\Delta_0}{\Pi_0}$, so wird

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \Pi_0 h_0 = \Pi_1 h_1 = \Pi_2 h_3 = \Pi_3 h_3 = 2\,w \qquad (180.)$$

ein neuer Modulus, für den ich das Symbol $2\,w$ gewählt habe, und welcher dem in §. 114 besprochenen Modulus des ebnen Dreiecks $\mathrm{v} = h_1 \sin\alpha$ entspricht.

Dividirt man die Gleichung 176 durch $\mathfrak{M}$, so erhält man für $2\,w$ die neue Form:

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = 2\,w = \Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3 = [\Pi_0 d_0] \qquad (181.)$$

worin die Vorzeichen nach dem in §. 118 ausgesprochenen Gesetze zu nehmen sind.

Für ein gegebenes Tetraeder ist die algebraische Summe der Producte der vier Abstände eines beliebigen Punktes im Raume von den Tetraederflächen und der Π-sinus der diesen Flächen gegenüberliegenden Ecken constant für alle Lagen dieses Punktes. Verlegt man denselben in einen Eckpunkt des Tetraeders, so reducirt sich diese Productensumme auf das eine Product der aus diesem Eckpunkte gefällten Höhe und des Π-sinus der Ecke.

Ist also für ein gegebenes Tetraeder der Modulus $2\,w$ auf irgend eine Weise ermittelt, so giebt die Gleichung 181 für jeden Punkt im Raume, dessen Abstände von dreien der Tetraederebnen gegeben sind, seinen Abstand von der vierten.

§. 122.

Noch eine andere Aufgabe wird dadurch gelöst:

Liegt ein Punkt K im Innern des Tetraeders, so sind die Ecken, welche durch vier von K auf die Flächen gefällte Normalen d_0, d_1, d_2, d_3 bestimmt werden, Polarecken der Tetraeder-Ecken. Liegt K ausserhalb des Tetraeders, so sind sie Neben-

ecken oder anstossende Ecken der Polarecken der Tetraederecken. In jedem Falle ist daher

$$\Pi_0 = \overline{P}_0,\ \Pi_1 = \overline{P}_1,\ \Pi_2 = \overline{P}_2,\ \Pi_3 = \overline{P}_3$$

wenn die $\overline{P}_0 \ldots$ die P-sinus der Ecken bei K bedeuten. Also ist auch nach 180. 181

$$2w = \overline{P}_0 h_0 = \overline{P}_1 h_1 = \overline{P}_2 h_2 = \overline{P}_3 h_3 \qquad (182.)$$

$$= \overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3 = [\overline{P}_0 d_0] \qquad (183.)$$

Sind also irgend vier von einem Punkte im Raume ausgehende Linien d_0, d_1, d_2, d_3 der Grösse und der Lage nach gegeben, also auch die P-sinus der durch sie bestimmten Ecken, und sind auf ihren Endpunkten normale Ebnen errichtet, so giebt die Gleichung 182 in der Form

$$h_0 = \frac{[\overline{P}_0 d_0]}{\overline{P}_0}$$

die Abstände h_0, h_1, h_2, h_3 des Durchschnittspunktes je dreier von der vierten.

Anmerkung. Ganz analog ist das Verhalten des Modulus v im ebnen Dreieck (§. 114). Denn werden von einem beliebigen Punkte K innerhalb oder ausserhalb eines ebnen Dreiecks (aber in dessen Ebne) die drei Normalen d_1, d_2, d_3 auf die drei Seiten a, b, c gefällt, und sind h_1, h_2, h_3 die auf diese Seiten gefällten Höhen, so ist immer

$$2\triangle = ah_1 = bh_2 = ch_3$$

$$= ad_1 + bd_2 + cd_3 = [ad]$$

wobei die Vorzeichen in analoger Weise, wie in 181 zu nehmen sind. — Also ist, wenn man durch $2\varrho = \frac{a}{\sin\alpha}$ dividirt

$$\frac{\triangle}{\varrho} = h_1 \sin\alpha = h_2 \sin\beta = h_3 \sin\gamma$$

$$= d_1 \sin\alpha + d_2 \sin\beta + d_3 \sin\gamma$$

in welchem Ausdruck man unter α, β, γ sowohl die Winkel des Dreiecks verstehen kann, als auch die drei Winkel $d_2 d_3$, $d_1 d_3$, $d_1 d_2$.

§. 123.

Bezeichnen H_1, H_2, H_3 die drei Winkel, unter denen die drei Kanten der Ecke O: u, p, q gegen die Ebne $\triangle_0$ geneigt sind, so ist die Tetraederhöhe

$$h_0 = u \sin H_1 = p \sin H_2 = q \sin H_3$$

und da nach 10. b

$$\sin H_1 = \frac{2\,\Pi_1}{\sin \alpha},\ \sin H_2 = \frac{2\,\Pi_2}{\sin \beta},\ \sin H_3 = \frac{2\,\Pi_3}{\sin \gamma},$$

so ist $$h_0 = \frac{2\,\Pi_1 u}{\sin \alpha} = \frac{2\,\Pi_2 p}{\sin \beta} = \frac{2\,\Pi_3 q}{\sin \gamma},\ \text{also} \qquad (184.)$$

$$h_0^3 = \frac{8\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,upq}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = (\text{nach } 9.\text{ a})\ \frac{4\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,P_0\,upq}{\Pi_0^2}$$

also nach 11:

$$\Pi_0^2 h_0^2 = 4\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3 \cdot \frac{3\,\mathfrak{T}}{h_0} = 4\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,\triangle_0$$

und da nach 169 ist $\triangle_0 \Pi_1 = \triangle_1 \Pi_0$ u. s. w.:

$$w = \sqrt{\triangle_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3} = \sqrt{\Pi_0\,\triangle_1\,\Pi_2\,\Pi_3} = \sqrt{\Pi_0\,\Pi_1\,\triangle_2\,\Pi_3}$$
$$= \sqrt{\Pi_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\triangle_3} \qquad (185.)$$

welche Wandelform des w-Modulus in tetraedrischen Rechnungen vorzugsweise oft zu benutzen ist.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\mathfrak{M}$, so erhält man vermöge 181 und 169:

$$3\,\mathfrak{T} = 2\,\mathfrak{M}\sqrt{\triangle_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3} = 2\sqrt{\triangle_0\,\mathfrak{M}\,\Pi_1\,\mathfrak{M}\,\Pi_2\,\Pi_3},\ \text{d. i.:}$$

$$3\,\mathfrak{T} = 2\sqrt{\triangle_0\triangle_1\triangle_2\,\Pi_3} = 2\sqrt{\triangle_0\,\triangle_1\,\Pi_2\,\triangle_3} = 2\sqrt{\triangle_0\Pi_1\,\triangle_2\triangle_3}$$
$$= 2\sqrt{\Pi_0\,\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3} \qquad (186.)$$

Anmerkung. Am ebnen Dreieck haben die beiden Moduln $\frac{\triangle}{\varrho}$ oder ν und $2\triangle$, welche den w und $3\mathfrak{T}$ entsprechen, auch Formen, welche den in 185 und 186 erscheinenden entsprechen, nämlich

$$\frac{\triangle}{\varrho} = \frac{ab\sin\gamma}{2\varrho} = a \sin\beta \sin\gamma$$
$$2\triangle = ab\sin\gamma$$

§. 124.

Aus 184 ergiebt sich ferner:

$$w = \tfrac{1}{2}\,\Pi_0 h_0 = \frac{\Pi_0\,\Pi_1\,u}{\sin\alpha} = \frac{\Pi_0\,\Pi_2 p}{\sin\beta} = \frac{\Pi_0\,\Pi_3\,q}{\sin\gamma} \qquad (187.)$$
$$= \frac{\Pi_2\,\Pi_3\,l}{\sin\alpha'} = \frac{\Pi_1\,\Pi_3\,m}{\sin\beta'} = \frac{\Pi_1\,\Pi_2\,n}{\sin\gamma'}$$

$$\frac{3\mathfrak{T}}{2} = \tfrac{1}{2}\triangle_0 h_0 = \frac{\triangle_0 \Pi_1 u}{\sin\alpha} = \frac{\triangle_0 \Pi_2 p}{\sin\beta} = \frac{\triangle_0 \Pi_3 q}{\sin\gamma} \quad (188.)$$
$$= \frac{\triangle_2 \Pi_3 l}{\sin\alpha'} = \frac{\triangle_1 \Pi_3 m}{\sin\beta'} = \frac{\triangle_1 \Pi_2 n}{\sin\gamma'}$$

worin für $\triangle_0 \Pi_1$ auch $\triangle_1 \Pi_0$ gesetzt werden kann u. s. w.

Aus $w = \frac{\Pi_0 \Pi_1 u}{\sin\alpha}$ folgt nun ferner:

$$w \Pi_2 \triangle_3 = \Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \triangle_3 \cdot \frac{u}{\sin\alpha} = \frac{w^2 u}{\sin\alpha}, \text{ also:}$$

$$w = \frac{\Pi_2 \triangle_3 \sin\alpha}{u} = \frac{\Pi_1 \triangle_3 \sin\beta}{p} = \frac{\Pi_1 \triangle_2 \sin\gamma}{q} \quad (189.$$
$$= \frac{\Pi_0 \triangle_1 \sin\alpha'}{l} = \frac{\Pi_0 \triangle_2 \sin\beta'}{m} = \frac{\Pi_0 \triangle_3 \sin\gamma'}{n}$$

woraus durch Multiplication mit $\mathfrak{M}$ nach 169 hervorgeht:

$$\frac{3\mathfrak{T}}{2} = \frac{\triangle_2 \triangle_3 \sin\alpha}{u} = \frac{\triangle_1 \triangle_3 \sin\beta}{p} = \frac{\triangle_1 \triangle_2 \sin\gamma}{q} \quad (190.)$$
$$= \frac{\triangle_0 \triangle_1 \sin\alpha'}{l} = \frac{\triangle_0 \triangle_2 \sin\beta'}{m} = \frac{\triangle_0 \triangle_3 \sin\gamma'}{n}$$

Aus jeder dieser Gruppen, z. B. 187, lässt sich noch ein sehr merkwürdiger Ausdruck für $\mathfrak{M}$ herleiten. Durch Multiplication zweier Werthe folgt

$$w^2 = \triangle_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 = \Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \cdot \frac{ul}{\sin\alpha \sin\alpha'}, \text{ also:}$$

$$\frac{\triangle_0}{\Pi_0} = \mathfrak{M} = \frac{ul}{\sin\alpha \sin\alpha'} = \frac{pm}{\sin\beta \sin\beta'} = \frac{qn}{\sin\gamma \sin\gamma'} \quad (191.)$$

§. 125.

Der Modulus $\frac{3 r_0 t_0}{\overline{\overline{P}}_0} = (r_0)$ 172, der für ein gegebenes Tetraeder unbestimmt ist, und daher eher für einen Modulus des Gebildes von vier Strahlen im Raume, auf denen Längen bestimmt sind, anzusehen ist, hat viel Analogie mit dem Modulus $\frac{\triangle_0}{\Pi_0} = \mathfrak{M}$ des Tetraeders d. h. des Gebildes von vier Ebnen. Bezeichnen wir, um diese Analogie zu veranschaulichen, mit D_0 den Ausdrück von vier Dimensionen:

$$3 r_0 t_0 = \overline{\overline{D}}_0 \text{ also } (r) \overline{\overline{P}}_0 = \overline{\overline{D}}_0$$

$$\text{so ist } (r) = \frac{\overline{\overline{D}}_0}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{\overline{\overline{D}}_1}{\overline{\overline{P}}_1} = \frac{\overline{\overline{D}}_2}{\overline{\overline{P}}_2} = \frac{\overline{\overline{D}}_3}{\overline{\overline{P}}_3}$$

$$(r_0) \overline{\overline{P}}_0 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{P}}_2 \overline{\overline{P}}_3 = \overline{\overline{D}}_0 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{P}}_2 \overline{\overline{P}}_3 = \overline{\overline{P}}_0 \overline{\overline{D}}_1 \overline{\overline{P}}_2 \overline{\overline{P}}_3 = \overline{\overline{P}}_0 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{D}}_2 \overline{\overline{P}}_3$$
$$= \overline{\overline{P}}_0 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{P}}_2 \overline{\overline{D}}_0 = W^2 \qquad (193.)$$

welcher Modulus der Form von w^2 185 entspricht, und daher mit W^2 bezeichnet werde.

Weiter ist nun vermöge 192

$$(r_0)\, W = \sqrt{\overline{\overline{P}}_0 \overline{\overline{D}}_1 \overline{\overline{D}}_2 \overline{\overline{D}}_3} = \sqrt{\overline{\overline{D}}_0 \overline{\overline{P}}_1 \overline{\overline{D}}_2 \overline{\overline{D}}_3} = \sqrt{\overline{\overline{D}}_0 \overline{\overline{D}}_1 \overline{\overline{P}}_2 \overline{\overline{D}}_3}$$
$$\sqrt{\overline{\overline{D}}_0 \overline{\overline{D}}_1 \overline{\overline{D}}_2 \overline{\overline{P}}_3} \qquad (194.)$$

welcher Ausdruck von sechs Dimensionen der Form 186 von $3\,\mathfrak{T}$ entspricht.

Bezeichnen wir ferner die von K auf die sechs Kanten l, m, n, u, p, q gefällten Normalen mit l', m', n', u', p', q', so sind die zweifachen Inhalte der Dreiecke KBC, KOA:

$$r_2 r_3 \sin \mathfrak{a} = l l'$$
$$r_0 r_1 \sin \mathfrak{a} = u u'$$

$$\text{also } r_0 r_1 r_2 r_3 = (r_0) = \frac{l l' \cdot u u'}{\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{a}'} = \frac{m m' \cdot p p'}{\sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{b}'} = \frac{n n' \cdot q q'}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{c}'} \qquad (195.)$$

was an die Form 191 von $\mathfrak{M}$ erinnert.

§. 126.

Für den Modulus w möge noch eine aus sechs Bestimmungsstücken gebildete Wandelform erwähnt werden. Es ist

$$2\,\Pi_1 = \sin a_1 \sin \beta' \sin \gamma'$$
$$2\,\Pi_2 = \sin b_2 \sin \alpha' \sin \gamma'$$
$$2\,\Pi_3 = \sin c_3 \sin \alpha' \sin \beta'$$
$$2\,\triangle_0 = 2\,\varrho_0^2 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3$$

Daraus folgt:

$$2w = 2\sqrt{\triangle_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3} = \varrho_0 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \qquad (196.)$$

worin a_1, b_2, c_3 als die Winkel eines ebnen Dreiecks $\triangle_0$ nur als zwei Bestimmungsstücke zu zählen sind.

In diesem Ausdruck ist das Theilproduct $2\varrho_0 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 = l \sin b_2 \sin c_3$ diejenige Function des Dreiecks $\triangle_0$, welche wir in §. 114 mit v bezeichnet haben als die dem w des Tetraeders analoge Function des ebnen Dreiecks. Bezeichnen nun v_0, v_1, v_2, v_3 diesen Modulus für die Dreiecke $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, so ist

$$4w = v_0 \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' = v_1 \sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma \qquad (197.)$$
$$= v_2 \sin\alpha \sin\beta' \sin\gamma = v_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma'$$

§. 127.

Setzt man in 186 oder 187: $\triangle_0 = \frac{3\mathfrak{T}}{h_0}$ u. s. w., $\Pi_0 = \frac{2w}{h_0}$, so findet man

$$h_0 h_1 h_2 h_3 = (h_0) = 4 \cdot 3\mathfrak{T} \cdot 2w = 16\mathfrak{M}w^2 \qquad (198.)$$

ein neuer Modulus, dessen Zeichen (h_0). Daraus folgt:

$$3\mathfrak{T} = \frac{h_1 h_2 h_3}{4\Pi_0} = \frac{h_0 h_2 h_3}{4\Pi_1} = \frac{h_0 h_1 h_3}{4\Pi_2} = \frac{h_0 h_1 h_2}{4\Pi_3} \qquad (199.)$$

$$2w = \frac{h_1 h_2 h_3}{4\triangle_0} = \frac{h_0 h_2 h_3}{4\triangle_1} = \frac{h_0 h_1 h_3}{4\triangle_2} = \frac{h_0 h_1 h_2}{4\triangle_3} \qquad (200.)$$

Setzt man dieselben Werthe der $\triangle$ und Π in 189 oder 190, dann in 187 oder 188, so ergiebt sich

$$3\mathfrak{T} = \frac{h_2 h_3 u}{2\sin\alpha} = \frac{h_1 h_3 p}{2\sin\beta} = \frac{h_1 h_2 q}{2\sin\gamma} \qquad (201.)$$
$$= \frac{h_0 h_1 l}{2\sin\alpha'} = \frac{h_0 h_2 m}{2\sin\beta'} = \frac{h_0 h_3 n}{2\sin\gamma'}$$

$$2w = \frac{h_0 h_1 \sin\alpha}{2u} = \frac{h_0 h_2 \sin\beta}{2p} = \frac{h_0 h_3 \sin\gamma}{2q} \qquad (202.)$$
$$= \frac{h_3 h_2 \sin\alpha'}{2l} = \frac{h_1 h_3 \sin\beta'}{2m} = \frac{h_1 h_2 \sin\gamma'}{2n}$$

Durch Multiplication je zweier Ausdrücke in 201, so wie in 202 findet sich

$$(h_0) = 4\mathfrak{M} \cdot 4w^2 \qquad (203.)$$
$$(h_0) = \frac{4 \cdot 9\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{M}} \qquad (204.)$$

Aus 203 ergiebt sich noch eine Wandelform für $\mathfrak{M}$. Es ist nämlich

$$\mathfrak{M} = \frac{(h)}{16\,w^2} = \frac{h_0 h_1 h_2 h_3}{4\,\Pi_2 h_2\,\Pi_3 h_3} = \frac{h_0 h_1}{4\,\Pi_2\,\Pi_3} \qquad (205.)$$
$$= \frac{h_0 h_2}{4\,\Pi_1\,\Pi_3} = \frac{h_0 h_3}{4\,\Pi_1\,\Pi_2} = \text{etc.}$$

§. 128.

Nach 185 und 168 ist

$$\frac{w^2}{\mu^2} = \triangle_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3 \cdot \frac{\Pi_0}{\triangle_0} M_0 M_1 M_2 M_3 = P_0 P_1 P_2 P_3, \text{ also}$$

$$\sqrt{P_0 P_1 P_2 P_3} = \sqrt{(P_0)} = \frac{w}{\mu} \qquad (206.)$$

ein Tetraeder-Modulus, dessen wichtigste Wandelform nach 167 und 180 ist:

$$\sqrt{(P_0)} = \frac{w}{\mu} = \frac{\Pi_0 h_0 M_0}{4\,\varrho_0} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(P)} = \frac{P_0 h_0}{4\,\varrho_0} = \frac{P_1 h_1}{4\,\varrho_1} = \frac{P_2 h_2}{4\,\varrho_2} = \frac{P_3 h_3}{4\,\varrho_3} \qquad (207.)$$

woraus weiter folgt:

$$h_0 = \frac{4\,\varrho_0\,\sqrt{(P_0)}}{P_0}, \text{ also}$$

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{\sqrt{(P_0)}} = \frac{\triangle_0 h_0}{\sqrt{(P_0)}} = \frac{4\,\varrho_0\,\triangle_0}{P_0} = \frac{2\,\varrho_0 mn \sin a_1}{P_0} = \frac{lmn}{P_0}$$

Dieser neue Modulus ist in seiner letzten Gestalt durch seinen Gegensatz zu $3\mathfrak{T} = upqP_0$ bemerkenswerth, daher sein Symbol das an $\mathfrak{T}$ erinnernde $\mathfrak{D}$ sein mag, also

$$\mathfrak{D} = \frac{lmn}{P_0} = \frac{lpq}{P_1} = \frac{umq}{P_2} = \frac{upn}{P_3} \qquad (208.)$$

$$\mathfrak{D} = \frac{4\,\varrho_0\,\triangle_0}{P_0} = \frac{4\,\varrho_1\,\triangle_1}{P_1} = \frac{4\,\varrho_2\,\triangle_2}{P_2} = \frac{4\,\varrho_3\,\triangle_3}{P_3} \qquad (209.)$$

Feste Formen desselben sind:

$$\mathfrak{D} = \frac{3\,\mathfrak{T}}{\sqrt{(P_0)}} = \frac{2\,\mathfrak{M} w}{\sqrt{(P_0)}} = 2\,\mathfrak{M}\,\mu \qquad (210.)$$

§. 129.

Nach 172 ist allgemein

$$(r_0) = \frac{3 r_0 t_0}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{3\,r_1 t_1}{\overline{\overline{P}}_1} = \text{etc.}$$

Dies führt noch auf eine neue Klasse von Moduln, wenn man $3\,\mathfrak{t}_0 = \triangle_0 d_0 = \mathfrak{M}\,\Pi_0 d_0$ u. s. w. setzt. Es ist nämlich

$$(r) = \frac{\triangle_0 d_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\triangle_1 d_1 r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (211.)$$

$$\frac{(r)}{\mathfrak{M}} = \frac{\Pi_0 d_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\Pi_1 d_1 r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (212.)$$

Für ein gegebenes Tetraeder sind aber diese Moduli, wie schon erwähnt, unbestimmt, so lange nicht die Lage des Punktes K bestimmt ist, von dem die r_0, r_1, r_2, r_3 ausgehen.

Ist nun K der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel, also $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$, so ist

$$r^3 = \frac{\triangle_0 d_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\triangle_1 d_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (213.)$$

$$\frac{r^3}{\mathfrak{M}} = \frac{\Pi_0 d_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\Pi_1 d_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (214.)$$

Ist K der Mittelpunkt einer der acht Berührungskugeln (s. §. 119), also $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d$, so ist

$$\frac{(r_0)}{d} = \frac{\triangle_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\triangle_1 r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (215.)$$

$$\frac{(r_0)}{\mathfrak{M}d} = \frac{\Pi_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\Pi_1 r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \text{etc.} \qquad (216.)$$

Der Schwerpunkt des Tetraeders theilt bekanntlich jede der vier Schwerlinien im Verhältniss 1 : 3. Das durch eine der Schwerlinien und die zugehörige Tetraederhöhe gelegte ebne Dreieck zeigt, dass demnach für den Schwerpunkt auch $d_0 = \frac{1}{4} h_0$, $d_1 = \frac{1}{4} h_1$ u. s. w. ist, also auch $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_3 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}$. Der Schwerpunkt des Tetraeders ist also derjenige Punkt K, von dem aus die durch r_0, r_1, r_2, r_3 gelegten Ebnen das $\mathfrak{T}$ in vier gleiche Theiltetraeder theilen, und dies ist seine reingeometrische Bedeutung, welche hier allein in Betracht kommt, während seine mechanischen Beziehungen in ein anderes Gebiet gehören. Nur der Kürze halber soll er auch hier ferner als „Schwerpunkt“ bezeichnet werden. Für diesen ist nun

$$\frac{4\,(r_0)}{3\,\mathfrak{T}} = \frac{r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \frac{r_2}{\overline{\overline{P_2}}} = \frac{r_3}{\overline{\overline{P_3}}} \qquad (217.)$$

also auch

$$r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = \overline{\overline{P}}_0 : \overline{\overline{P}}_1 : \overline{\overline{P}}_2 : \overline{\overline{P}}_3 \qquad (218.)$$

Im Tetraeder verhalten sich die vom Schwerpunkte nach den Eckpunkten gezogenen Linien wie die P-sinus der durch die je drei andern bestimmten Ecken.

Das ist aber nach §. 76 das Verhalten, welches am Parallelepipedon zwischen den von einem Eckpunkte ausgehenden drei Kanten und der Diagonale statt findet, also zwischen drei auf einen Punkt wirkenden Kräften und ihrer Resultirenden, welche, rückwärts gewendet, mit ihnen im Gleichgewicht ist. Daraus ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz:

Vier Kräfte, am Schwerpunkte eines Tetraeders in den Richtungen der nach den Eckpunkten gezogenen geraden Linien wirkend, sind im Gleichgewicht, wenn sie diesen Linien proportionirt sind.

Für denjenigen Punkt K endlich, von dem aus die durch r_0, r_1, r_2, r_3 gelegten Ebnen das Tetraeder in vier Theiltetraeder theilen, die sich verhalten, wie die Zahlen α, β, γ, δ, ist

$$\mathfrak{t}_0 = \frac{\alpha\,\mathfrak{T}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},\quad \mathfrak{t}_1 = \frac{\beta\,\mathfrak{T}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},\quad \mathfrak{t}_2 = \frac{\gamma\,\mathfrak{T}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

$$\mathfrak{t}_3 = \frac{\delta\,\mathfrak{T}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

also

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,(r_0)}{3\,\mathfrak{T}} = \frac{\alpha r_0}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{\beta r_1}{\overline{\overline{P}}_1} = \frac{\gamma r_2}{\overline{\overline{P}}_2} = \frac{\delta r_3}{\overline{\overline{P}}_3} \qquad (219.)$$

§. 130.

Wenn vier von den Eckpuncten eines Tetraeders nach den gegenüberliegenden Flächen gezogene Transversallinien t_0, t_1, t_2, t_3 sich in einem Punkte K schneiden, so ist

$$\frac{t_0 - r_0}{t_0} = \frac{d_0}{h_0} = \frac{\mathfrak{t}_0}{\mathfrak{T}},\quad \frac{t_1 - r_1}{t_1} = \frac{d_1}{h_1} = \frac{\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{T}} \text{ u. s. w.}$$

(welche Verhältnisse für den Schwerpunkt alle $\frac{1}{4}$ sind) — also

$\mathfrak{t}_0 = \frac{t_0 - r_0}{t_0}\,\mathfrak{T}$ u. s. w. und nach 172:

$$\frac{(r)}{3\mathfrak{T}} = \frac{t_0 - r_0}{t_0} \cdot \frac{r_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{t_1 - r_1}{t_1} \cdot \frac{r_1}{\overline{\overline{P_1}}} = \frac{t_2 - r_2}{t_2} \cdot \frac{r_2}{\overline{\overline{P_2}}} = \frac{t_3 - r_3}{t_3} \cdot \frac{r_3}{\overline{\overline{P_3}}} \quad (220.)$$

und da offenbar $\frac{t_0 - r_0}{t_0} = \frac{d_0}{h_0}$ u. s. w. ist:

$$\frac{(r)}{3\mathfrak{T}} = \frac{d_0 r_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}} = \frac{d_1 r_1}{h_1 \overline{\overline{P_1}}} = \frac{d_2 r_2}{h_2 \overline{\overline{P_2}}} = \frac{d_3 r_3}{h_3 \overline{\overline{P_3}}} \quad (221.)$$

also für $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$:

$$\frac{r^3}{3\mathfrak{T}} = \frac{d_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}} = \frac{d_1}{h_1 \overline{\overline{P_1}}} = \frac{d_2}{h_2 \overline{\overline{P_2}}} = \frac{d_3}{h_3 \overline{\overline{P_3}}} \quad (222.)$$

und für $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d$

$$\frac{(r)}{3\mathfrak{T} \cdot d} = \frac{r_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}} = \frac{r_1}{h_1 \overline{\overline{P_1}}} = \frac{r_2}{h_2 \overline{\overline{P_2}}} = \frac{r_3}{h_3 \overline{\overline{P_3}}} \quad (223.)$$

§. 131.

Es ist wohl anzunehmen, dass ausser den in den vorigen §§. aufgestellten Moduln noch andere am Tetraeder aufzufinden sind. Wenigstens bilden jene kein System, an dem sich erkennen liesse, ob es vollständig ist; und ich wüsste auch kein in der Natur der Sache liegendes Kriterium anzugeben, nach dem sich entscheiden liesse, ob die Zahl der möglichen Tetraeder-Moduln erschöpft sei. — Jede symmetrische Combination aller Bestimmungsstücke einer Art, z. B. der vier Π oder der P, oder der sechs Kanten u. s. w. ist ein Modulus, sobald sie sich ausdrücken lässt durch eine Anzahl anderer Bestimmungsstücke von einer Beziehung zu einander, die zwischen eben so vielen andern resp. gleichartigen besteht.

Jede Gleichung zwischen verschiedenen Formen eines Modulus ist nun an und für sich der Ausdruck eines mehr oder weniger interessanten tetraedrischen Lehrsatzes. Ausserdem aber gewinnen diese Lehrsätze noch eine wichtige Beziehung zu bestimmten Aufgaben durch den von ihnen zu machenden Gebrauch, von dem im folgenden Capitel die Rede sein wird, so wie dadurch, dass sie zu den manchfaltigsten Umformungen vorliegender Gleichungen die Mittel bieten. Um sie aber für diese Zwecke recht vortheilhaft benutzen zu können, ist es zweckmässig, die zwischen den aufgefundenen Moduln bestehenden Hauptrelationen übersichtlich

vor Augen zu haben, weshalb sie hier in einer Tabelle folgen mögen. Die möglichste Vervollständigung dieser Tabelle wird die Darstellung eines Systems der möglichen tetraedrischen Aufgaben wesentlich fördern.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne das gewählte Symbol des Modulus, die zweite die festen Formen, die dritte die einfachsten Wandelformen aus zwei Bestimmungsstücken, die vierte andere, zusammengesetztere Wandelformen.

$$\mu = \frac{w}{\sqrt{(P_0)}} \ (206.) = \frac{2\varrho_0}{M_0} \ (167.)$$
$$= \frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{M}} \ (210.)$$

$$\mathfrak{M} = \mu^2(M_0) \ (168.) = \frac{\triangle_0}{\Pi_0} \ (169.) = 4\varrho_0\varrho_1 M_2 M_3 \quad (170.)$$
$$= \frac{(2\varrho_0)}{\mu^2} \quad (171.) \qquad = \frac{h_0 h_1}{4\Pi_2\Pi_3} \quad (205.)$$
$$= \frac{3\mathfrak{T}}{2w} \quad (180.) \qquad = \frac{ul}{\sin\alpha \sin\alpha'} \quad (191.)$$
$$= \frac{\mathfrak{D}}{2\mu} \quad (210.)$$
$$= \frac{(h_0)}{16 w^2} \quad (203.)$$

$$3\mathfrak{T} = 2w\mathfrak{M} \ (180.) = \triangle_0 h_0 \ (174.) = upqP_0 \quad (175.)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{M}(h_0)} \ (204.) \qquad = 2\sqrt{\Pi_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \quad (186.)$$
$$= \frac{(h_0)}{4 \cdot 2w} \quad (198.) \qquad = \frac{2\Pi_0\triangle_1 u}{\sin\alpha} \quad (188.)$$
$$= \mathfrak{D}\sqrt{(P_0)} \quad (210.) \qquad = \frac{2\triangle_2\triangle_3 \sin\alpha}{u} \quad (190.)$$
$$= [\triangle_0 d_0] \quad (176.) \qquad = \frac{h_2 h_3 u}{2\sin\alpha} \quad (201.)$$
$$= (r_0)\left[\frac{\overline{P_0}}{r_0}\right] \ (178.) \qquad = \frac{h_1 h_2 h_3}{4\Pi_0} \quad (199.)$$
$$= d[\triangle_0] \quad (177.)$$
$$= r^3[\overline{\overline{P_0}}] \quad (179.)$$

$2w = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$ (180.) $= \Pi_0 h_0$ (180.) $= 2\sqrt{\triangle_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3}$ (185.)

$= \frac{(h_0)}{4 \cdot 3\mathfrak{T}}$ (198.) $= \frac{2\Pi_0 \Pi_1 u}{\sin\alpha}$ (187.)

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h_0)}{\mathfrak{M}}}$ (203.) $= \frac{2\Pi_2 \triangle_3 \sin\alpha}{u}$ (189.)

$= 2\mu\sqrt{(P_0)}$ (206.) $= \frac{h_0 h_1 \sin\alpha}{2u}$ (202.)

$= [\Pi_0 d_0]$ (181.) $= \frac{h_1 h_2 h_3}{4\triangle_0}$ (200.)

$= d[\Pi_0]$ (177.) $= \frac{1}{2} v_0 \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'$ (197.)

$\mathfrak{D} = 2\mu\mathfrak{M}$ (210.) $= \frac{lmn}{P_0}$ (208.)

$= \frac{3\mathfrak{T}}{\sqrt{(P_0)}}$ (210.) $= \frac{4\varrho_0 \triangle_0}{P_0}$ (209.)

$\sqrt{(P_0)} = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{D}}$ (210.) $= \frac{P_0 h_0}{4\varrho_0}$ (207.)

$= \frac{w}{\mu}$ (206.) $= \frac{upq P_0^2}{lmn}$

$(h_0) = 4 \cdot 3\mathfrak{T} \cdot 2w$ (198.) $= 4\Pi_0 \triangle_0 h_0^2$

$= 16\mathfrak{M}w^2$ (198.)

$= \frac{4 \cdot 9\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{M}}$ (204.)

Für die folgenden Moduln sind ausser dem $(r_0) = r_0 r_1 r_2 r_3$ keine besonderen Symbole gewählt, weshalb die Columne der festen Formen mit der Columne der Symbole zusammenfällt:

$(r_0) = r_0 r_1 r_2 r_3$ $= \frac{\overline{\overline{D_0}}}{\overline{\overline{P_0}}}$ (192.) $= \frac{3 r_0 t_0}{\overline{\overline{P_0}}}$ (172.)

$= \frac{3\mathfrak{T}}{\left[\frac{\overline{\overline{P_0}}}{r_0}\right]}$ (178.) $= \frac{\triangle_0 d_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}}$ (211.)

$= \frac{ll' \cdot uu'}{\sin a \sin a'}$ (195.)

$$\frac{(r_0)}{\mathfrak{M}} = \frac{\Pi_0 d_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (212.)$$

$$\frac{(r_0)}{3\mathfrak{T}} = \frac{(t_0 - r_0) r_0}{t_0 \overline{\overline{P_0}}} = \frac{d_0 r_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}} \quad (221.)$$

Daraus für $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$:

$$r^3 = \frac{3\mathfrak{p}_0}{\overline{\overline{P_0}}} = \frac{\triangle_0 d_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (213.)$$

$$\frac{r^3}{\mathfrak{M}} = \frac{\Pi_0 d_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (214.)$$

$$\frac{r^3}{3\mathfrak{T}} = \frac{t_0 - r_0}{t_0 \overline{\overline{P_0}}} = \frac{d_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}} \quad (222.)$$

---

für $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d$:

$$\frac{(r_0)}{d} = \frac{\triangle_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (215.)$$

$$\frac{(r_0)}{\mathfrak{M} d} = \frac{\Pi_0 r_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (216.)$$

$$\frac{(r^3)}{3\mathfrak{T} \cdot d} = \frac{r_0}{h_0 \overline{\overline{P_0}}}$$

---

für $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{4}\mathfrak{T}$:

$$\frac{4(r_0)}{3\mathfrak{T}} = \frac{r_0}{\overline{\overline{P_0}}} \quad (217.)$$

Dreizehntes Capitel.

Folgerungen, die aus einzelnen Formen verschiedener Moduln zu ziehen sind.

(Dieses Capitel enthält in seinem grösseren Theile (§. 132 — 138) nur Material für künftige Ausführungen, und ist in den folgenden Capiteln nicht benutzt. Es stellt eine Anzahl Gleichungen von übereinstimmendem Bau auf, welche zwischen Bestimmungsstücken des Tetraeders bestehen. Ob daraus anderweite wichtige Eigenschaften des Tetraeders abzuleiten seien (wie zu vermuthen ist) bleibt ferneren Untersuchungen vorbehalten. — Dagegen finden die in §. 139 und 140 mitgetheilten Formeln (die mit dem übrigen Inhalt des Capitels nicht in Verbindung stehen) im nächsten Capitel vielfache Anwendung.)

§. 132.

In allen den im vorigen Capitel aufgeführten Moduln finden wir — wenigstens in der einen oder andern Form derselben — $\overline{\overline{P_0}}$ oder Π_0 als Factor des Zählers oder des Nenners. Auch die beiden: $\mathfrak{D}$ und $\sqrt{(P_0)}$, von denen in der Tabelle keine solche Formen aufgeführt sind, können wir schreiben:

$$\mathfrak{D} = \frac{2\mu\,\Delta_0}{\Pi_0} \text{ und } \sqrt{(P_0)} = \frac{\Pi_0 h_0}{2\mu}$$

Für die Functionen $\overline{\overline{P_0}}$ und Π_0 aber bestehen nach 20. a. b. die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P_0}} + \overline{\overline{P_1}}\cos\mathfrak{a}' + \overline{\overline{P_2}}\cos\mathfrak{b}' + \overline{\overline{P_3}}\cos\mathfrak{c}' &= o \\ -\Pi_0 + \Pi_1\cos\alpha' + \Pi_2\cos\beta' + \Pi_3\cos\gamma' &= o \end{aligned}$$

mit allen den Modificationen und den Folgerungen, die im dritten und vierten Capitel daraus abgeleitet worden sind.

Dividiren oder multipliciren wir nun diese Gleichungen durch die Moduln, je nachdem diese $\overline{\overline{P}}$ oder Π im Zähler oder im Nenner als Factor enthalten, so erhalten wir zwei Klassen neuer Gleichungen, deren eine die Flächenwinkel des Tetraeders, die andere die Seitenwinkel des durch r_0, r_1, r_2, r_3 bestimmten Eckensystems mit je vier andern unter einander gleichartigen, einfachen oder zusammengesetzten Bestimmungsgrössen des Tetraeders in Verbindung setzt.

§. 133.

So erhalten wir aus 20. b., wenn wir sie mit $\mathfrak{M}$ multipliciren, nach 169:

$$-\Delta_0 + \Delta_1 \cos\alpha' + \Delta_2 \cos\beta' + \Delta_3 \cos\gamma' = o \quad (224.)$$

diejenige Gleichung, welche schon in §. 25 des ersten Theiles besprochen ist, und die auch unmittelbar aus der Vergleichung des Δ_0 mit den drei Projectionen von $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ auf Δ_0 hervorgeht.

Wenn wir dagegen die Gleichung 20. b durch $2w = \Pi_0 h_0 = \Pi_1 h_1 \ldots$ dividiren, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{h_0} + \frac{\cos\alpha'}{h_1} + \frac{\cos\beta'}{h_2} + \frac{\cos\gamma'}{h_3} = o \quad (225.)$$

woraus man dann vermöge der verschiedenen Beziehungen zwischen $2w$ und h noch manche andere Gleichungen ableiten kann, z. B. indem man setzt

$$\frac{1}{h_0} = \frac{\Pi_0}{2w} \ (180.) = \frac{4\,\Pi_0\,\Delta_0}{h_1 h_2 h_3} \ (200.),$$

$$4\,\Pi_0\,\Delta_0 = h_2 h_3 \cos\alpha' + h_1 h_3 \cos\beta' + h_1 h_2 \cos\gamma' \quad (226.)$$

Durch 167 erhalten wir, da $\mu = \frac{2\varrho_0}{M_0} = \frac{2\varrho_0\,\Pi_0}{P_0}$ ist:

$$\frac{\Pi_0}{\mu} = \frac{P_0}{2\varrho_0} = \frac{P_1}{2\varrho_1}\cos\alpha' + \frac{P_2}{2\varrho_2}\cos\beta' + \frac{P_3}{2\varrho_3}\cos\gamma' \quad (227.)$$

Ferner durch 211 die Gleichung:

$$\frac{\Delta_0}{(r)} = \frac{\overline{\overline{P_0}}}{d_0 r_0} = \frac{\overline{\overline{P_1}}\cos\alpha'}{d_1 r_1} + \frac{\overline{\overline{P_2}}\cos\beta'}{d_2 r_2} + \frac{\overline{\overline{P_3}}\cos\gamma'}{d_3 r_3} \quad (228.)$$

welche für den Mittelpunct der umschriebenen Kugel übergeht in:

$$\frac{\triangle_0}{r^3} = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{d_0} = \frac{\overline{\overline{P}}_1 \cos\alpha'}{d_1} + \frac{\overline{\overline{P}}_2 \cos\beta'}{d_2} + \frac{\overline{\overline{P}}_3 \cos\gamma'}{d_3} \quad (229.)$$

und für den Mittelpunct der eingeschriebenen Kugel in:

$$\frac{\triangle_0 d}{(r)} = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{r_0} = \frac{\overline{\overline{P}}_1 \cos\alpha'}{r_1} + \frac{\overline{\overline{P}}_2 \cos\beta'}{r_2} + \frac{\overline{\overline{P}}_3 \cos\gamma'}{r_3} \quad (230.)$$

Alle diese Gleichungen haben eine doppelte Bedeutung dadurch, dass man statt der Flächenwinkel des Tetraeders $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ die Winkel der $d_0, d_1 \ldots$, nämlich $a' = \pi - \alpha'$, $b' = \pi - \beta', \ldots$ einführen kann.

§. 134.

In gleicher Weise geht aus der Gleichung

$$\overline{\overline{P}}_0 + \overline{\overline{P}}_1 \cos\mathfrak{a}' + \overline{\overline{P}}_2 \cos\mathfrak{b}' + \overline{\overline{P}}_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (20.\,\text{a.})$$

eine Reihe anderer Gleichungen hervor. Multiplicirt man sie mit $(r) = \frac{3 r_0 \mathfrak{t}_0}{\overline{\overline{P}}_0}$ (172.), so erhält man die Gleichung

$$r_0 \mathfrak{t}_0 + r_1 \mathfrak{t}_1 \cos\mathfrak{a}' + r_2 \mathfrak{t}_2 \cos\mathfrak{b}' + r_3 \mathfrak{t}_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (231.)$$

welche ebenfalls im §. 25 des ersten Theiles anticipando dazu benutzt ist, um die zwischen den Eckensinus und den Winkelsinus stattfindende Analogie durch eine Reihe von Sätzen hindurch zu verfolgen.

Durch 212 erhalten wir aus 20. a:

$$\Pi_0 d_0 r_0 + \Pi_1 d_1 r_1 \cos\mathfrak{a}' + \Pi_2 d_2 r_2 \cos\mathfrak{b}' + \Pi_3 d_3 r_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (232.)$$

durch 221:

$$\frac{d_0}{h_0} r_0 + \frac{d_1}{h_1} r_1 \cos\mathfrak{a}' + \frac{d_2}{h_2} r_2 \cos\mathfrak{b}' + \frac{d_3}{h_3} r_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (233.)$$

oder auch:

$$\frac{t_0 - r_0}{t_0} r_0 + \frac{t_1 - r_1}{t_1} r_1 \cos\mathfrak{a}' + \frac{t_2 - r_2}{t_2} r_2 \cos\mathfrak{b}' + \frac{t_3 - r_3}{t_3} r_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (234.)$$

Für den Mittelpunct der umschriebenen Kugel durch 213:

$$\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 \cos\mathfrak{a}' + \mathfrak{p}_2 \cos\mathfrak{b}' + \mathfrak{p}_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (235.)$$

durch 214:

$$\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 \cos\mathfrak{a}' + \Pi_2 d_2 \cos\mathfrak{b}' + \Pi_3 d_3 \cos\mathfrak{c}' = o \quad (236.)$$

durch 222:

$$\frac{d_0}{h_0} + \frac{d_1}{h_1}\cos \mathfrak{a}' + \frac{d_2}{h_2}\cos \mathfrak{b}' + \frac{d_3}{h_3}\cos \mathfrak{c}' = o \qquad (237.)$$

Für den Mittelpunct der eingeschriebenen Kugel durch 215 und 216:

$$\triangle_0 r_0 + \triangle_1 r_1 \cos \mathfrak{a}' + \triangle_2 r_2 \cos \mathfrak{b}' + \triangle_3 r_3 \cos \mathfrak{c}' = o \qquad (238.)$$

$$\Pi_0 r_0 + \Pi_1 r_1 \cos \mathfrak{a}' + \Pi_2 r_2 \cos \mathfrak{b}' + \Pi_3 r_3 \cos \mathfrak{c}' = o \qquad (239.)$$

$$\frac{r_0}{h_0} + \frac{r_1}{h_1}\cos \mathfrak{a}' + \frac{r_2}{h_2}\cos \mathfrak{b}' + \frac{r_3}{h_3}\cos \mathfrak{c}' = o \qquad (240.)$$

Für den Schwerpunct durch 217:

$$r_0 + r_1 \cos \mathfrak{a}' + r_2 \cos \mathfrak{b}' + r_3 \cos \mathfrak{c}' = o \qquad (241.)$$

Auch von diesen Gleichungen haben einige eine doppelte Bedeutung dadurch, dass man in ihnen $\Pi_0 \ldots$ durch $\overline{P}_0 \ldots$ ersetzen kann.

Es versteht sich von selbst, dass zu jeder der Gleichungen der §. 133 und 134 noch drei andere zu denken sind.

§. 135.

Die sämmtlichen Gleichungen des §. 134, so wie die drei letzten (228. 229. 230) des §. 133 haben zur Voraussetzung, dass der Punct K, von welchem die $r_0, r_1 \ldots$ ausgehen, im Innern des Tetraeders liegen. Findet diese Voraussetzung nicht statt, so sind die Vorzeichen der $\overline{\overline{P}}_0 \ldots$ in 228—230 nach §. 20 zu modificiren, so wie die Vorzeichen in den Gleichungen des §. 134 nach denen der Gleichung 20. a, aus welcher sie abgeleitet sind. Diese Vorzeichen bestimmen sich nach der Lage von K im Einzelnen so:

1) Liegt K in einem Aussenraume, etwa in dem von $\triangle_0$, oder in einer Scheitelecke des Tetraeders, etwa in der an O, so bilden offenbar r_0, r_1, r_2, r_3 eine durch r_0 dreigetheilte Ecke $r_1 r_2 r_3$ (System II. a. §. 8) und ist $\overline{\overline{P}}_0$ mit dem Minuszeichen zu versehen.

2) Liegt K in einem Aussenkeilraume des Tetraeders, etwa in dem an u anstossenden, so bilden r_0, r_1, r_2, r_3 eine vierkantige Ecke (System III. a) und sind $\overline{\overline{P}}_0$ und $\overline{\overline{P}}_1$, oder $\overline{\overline{P}}_2$ und $\overline{\overline{P}}_3$ mit dem Minuszeichen zu schreiben.

3) Liegt K in einer der Tetraederebnen, etwa in $\triangle_0$, so bilden die r_0, r_1, r_2, r_3 drei Ecken auf einer Ebne (System IV. a) und wird $\overline{\overline{P}}_0 =$ Null.

Liegt K in einer der sechs Kanten, etwa in u, so verschwinden die beiden Ecken der Indices 2 und 3, und die beiden Ecken der Indices 1 und 2 werden Nebenecken; also wird $\overline{\overline{P}}_2 = \overline{\overline{P}}_3 = 0$, $\overline{\overline{P}}_0 = \overline{\overline{P}}_1$.

§. 136.

Somit haben wir Gleichungen für folgende je sieben theils einfache, theils zusammengesetzte Bestimmungsgrössen des Tetraeders.

1) allgemein für

$$\left.\begin{array}{llll}
\Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\
\overline{P}_0 & \overline{P}_1 & \overline{P}_2 & \overline{P}_3 \\
\triangle_0 & \triangle_1 & \triangle_2 & \triangle_3 \\
\frac{1}{h_0} & \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} \\
\frac{P_0}{\varrho_0} & \frac{P_1}{\varrho_1} & \frac{P_2}{\varrho_2} & \frac{P_3}{\varrho_3} \\
\frac{\overline{\overline{P}}_0}{d_0 r_0} & \frac{\overline{\overline{P}}_1}{d_1 r_1} & \frac{\overline{\overline{P}}_2}{d_2 r_2} & \frac{\overline{\overline{P}}_3}{d_3 r_3}
\end{array}\right\} \text{ und } \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma' \text{ oder } \cos a', \cos b', \cos c'$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\overline{\overline{P}}_0 & \overline{\overline{P}}_1 & \overline{\overline{P}}_2 & \overline{\overline{P}}_3 \\
r_0 t_0 & r_1 t_1 & r_2 t_2 & r_3 t_3 \\
\Pi_0 d_0 r_0 & \Pi_1 d_1 r_1 & \Pi_2 d_2 r_2 & \Pi_3 d_3 r_3 \\
\frac{d_0 r_0}{h_0} & \frac{d_1 r_1}{h_1} & \frac{d_2 r_2}{h_2} & \frac{d_3 r_3}{h_3} \\
\frac{t_0 - r_0}{t_0} r_0 & \frac{t_1 - r_1}{t_1} r_1 & \frac{t_2 - r_2}{t_2} r_2 & \frac{t_3 - r_3}{t_3} r_3
\end{array}\right\} \text{ und } \cos\mathfrak{a}', \cos\mathfrak{b}', \cos\mathfrak{c}'$$

In Beziehung auf den Mittelpunct der umschriebenen Kugel ($r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$) für

$$\left.\begin{array}{llll}
\frac{\overline{\overline{P}}_0}{d_0} & \frac{\overline{\overline{P}}_1}{d_1} & \frac{\overline{\overline{P}}_2}{d_2} & \frac{\overline{\overline{P}}_3}{d_3} \\
\mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_3 \\
\Pi_0 d_0 & \Pi_1 d_1 & \Pi_2 d_2 & \Pi_3 d_3 \\
\frac{d_0}{h_0} & \frac{d_1}{h_1} & \frac{d_2}{h_2} & \frac{d_3}{h_3}
\end{array}\right\} \text{ und } \cos\mathfrak{a}', \cos\mathfrak{b}', \cos\mathfrak{c}'$$

3) in Beziehung auf den Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel ($d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d$) für:

$$\frac{\overline{\overline{P_0}}}{r_0} \quad \frac{\overline{\overline{P_1}}}{r_1} \quad \frac{\overline{\overline{P_2}}}{r_2} \quad \frac{\overline{\overline{P_3}}}{r_3} \text{ und } \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$$

$$\left.\begin{array}{cccc} \triangle_0 r_0 & \triangle_1 r_1 & \triangle_2 r_2 & \triangle_3 r_3 \\ \Pi_0 r_0 & \Pi_1 r_1 & \Pi_2 r_2 & \Pi_3 r_3 \\ \frac{r_0}{h_0} & \frac{r_1}{h_1} & \frac{r_2}{h_2} & \frac{r_3}{h_3} \end{array}\right\} \text{ und } \cos\mathfrak{a}', \cos\mathfrak{b}', \cos\mathfrak{c}'$$

4) in Beziehung auf den Schwerpunct für

$$r_0 \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \text{ und } \cos\mathfrak{a}', \cos\mathfrak{b}', \cos\mathfrak{c}'$$

Fassen wir alle die hier aufgeführten Bestimmungsgrössen, die mit $\cos\mathfrak{a}'$, $\cos\mathfrak{b}'$, $\cos\mathfrak{c}'$ verbunden erscheinen, unter den Symbolen f_0, f_1, f_2, f_3 zusammen, die mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ verbundenen unter den Symbolen φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, so gilt für jede der vorstehend in Uebersicht gestellten Bestimmungsgrössen des Tetraeders eine der beiden Gleichungen

$$f_0 + f_1\cos\mathfrak{a}' + f_2\cos\mathfrak{b}' + f_3\cos\mathfrak{c}' = o \qquad (242.)$$

$$-\varphi_0 + \varphi_1\cos\alpha' + \varphi_2\cos\beta' + \varphi_3\cos\gamma' = o \qquad (243.)$$

zu deren jeder noch drei andere gehören.

§. 137.

Für diese Grössen gelten nun aber auch alle die im vierten Capitel aus den Grundgleichungen des dritten abgeleiteten Gleichungen, welche in Beziehung auf die P, resp. auf die Π, homogen sind, also die Gleichungen 26. 27. 28. 30. 31, wenn an die Stelle der P die f (und dabei an die Stelle der a, b, c, a', b', c' die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$), an die Stelle der Π die φ gesetzt werden.

Es ist also für alle diese Functionen nach 26. a. b:

$$\tfrac{1}{2}(f_0+f_1+f_2+f_3) = f_1\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + f_2\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' + f_3\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' \qquad (244.)$$

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) = \varphi_1\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha' + \varphi_2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta' + \varphi_3\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma'$$

und nach 27 a. b: (245.)

$$\tfrac{1}{2}(-f_0+f_1+f_2+f_3) = f_1\cos^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + f_2\cos^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' + f_3\cos^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' \qquad (246.)$$

$$\tfrac{1}{2}(-\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) = \varphi_1\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha' + \varphi_2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta' + \varphi_3\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma'$$

ferner nach 28. a. b: (247.)

$$f_0^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2 f_2 f_3 \cos \mathfrak{a} + 2 f_1 f_3 \cos \mathfrak{b} + 2 f_1 f_2 \cos \mathfrak{c} \quad (248.)$$

$$\varphi_0^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2 \varphi_2 \varphi_3 \cos \alpha - 2 \varphi_1 \varphi_3 \cos \beta - 2 \varphi_1 \varphi_2 \cos \gamma \quad (249.)$$

Daraus geht nun hervor, dass für alle die genannten f-Grössen, wenn die drei Strahlen r_1, r_2, r_3 eine rechtwinklige Ecke bilden, und für alle φ-Grössen, wenn das Tetraeder bei O rechtwinklig ist, die Gleichung statt findet

$$f_0^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \quad (250.)$$

$$\varphi_0^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \quad (251.)$$

worin zwei Gruppen von Lehrsätzen ausgesprochen sind, die alle dem Pythagoräischen Lehrsatze entsprechen. (vergl. §. 25.)

Ferner ist nach 30. a. b:

$$2 f_2 f_3 \cos \mathfrak{a} = f_1 (f_1 + f_0 \cos \mathfrak{a}') - f_2 (f_2 + f_0 \cos \mathfrak{b}') - f_3 (f_3 + f_0 \cos \mathfrak{c}') \quad (252.)$$

$$2 \varphi_2 \varphi_3 \cos \alpha = - \varphi_1 (\varphi_1 - \varphi_0 \cos \alpha') + \varphi_2 (\varphi_2 - \varphi_0 \cos \beta') + \varphi_3 (\varphi_3 - \varphi_0 \cos \gamma') \quad (253.)$$

und nach 31. a. b:

$$f_0^2 + f_1^2 + 2 f_0 f_1 \cos \mathfrak{a}' = f_2^2 + f_3^2 + 2 f_2 f_3 \cos \mathfrak{a} \quad (254.)$$

$$\varphi_0^2 + \varphi_1^2 - 2 \varphi_0 \varphi_1 \cos \alpha' = \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2 \varphi_2 \varphi_3 \cos \alpha \quad (255.)$$

Von diesen Gleichungen sind die wichtigsten 242. 243 und 248. 249, weil sie je sieben Bestimmungsgrössen des Tetraeders verbinden.

§. 138.

Zieht man von K einen fünften Strahl s in beliebiger Richtung, so ist nach 50. a

$$\overline{\overline{P}}_0 \cos(r_0 s) + \overline{\overline{P}}_1 \cos(r_1 s) + \overline{\overline{P}}_2 \cos(r_2 s) + \overline{\overline{P}}_3 \cos(r_3 s) = 0$$

und legt man durch das Tetraeder eine fünfte Ebne e in beliebiger Richtung, so hat man nach 50. b

$$\Pi_0 \cos(e_0 e) + \Pi_1 \cos(e_1 e) + \Pi_2 \cos(e_2 e) + \Pi_3 \cos(e_3 e) = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen geht nun, wenn wir sie mit jedem der oben aufgeführten Moduln multiplicirt, resp. dividirt, denken, das folgende Paar sehr umfassender Gleichungen hervor:

$$f_0 \cos(r_0 s) + f_1 \cos(r_1 s) + f_2 \cos(r_2 s) + f_3 \cos(r_3 s) = 0 \quad (256.)$$

$$\varphi_0 \cos(e_0 e) + \varphi_1 \cos(e_1 e) + \varphi_2 \cos(e_2 e) + \varphi_3 \cos(e_3 e) = 0 \quad (257.)$$

worin für die f_0 . . jede der nach §. 136 mit $\cos \mathfrak{a}'$, $\cos \mathfrak{b}'$, coc $\mathfrak{c}'$

verbundenen, für φ_0 . . . jede der mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ verbundenen Tetraedergrössen gesetzt werden können.

---

§. 139.

Aus den Formen 187 und 188 oder 189 und 190 der Modul $2w$ und $3\mathfrak{T}$ ergiebt sich eine Reihe von Ausdrücken, welche bei vielen tetraedrischen Rechnungen zu nützlichen Umwandlungen dienen können.

Nach 187 und 185 ist

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{w}{\Pi_0\,\Pi_1} = \sqrt{\frac{\Pi_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\triangle_3}{\Pi_0^2\,\Pi_1^2}} = \sqrt{\frac{\Pi_2\,\triangle_3}{\Pi_0\,\Pi_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{\Pi_2^2\,\triangle_3^2}{\Pi_0\,\Pi_1\,\Pi_2\,\triangle_3}} = \frac{\Pi_2\,\triangle_3}{w}$$

also

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{w}{\Pi_0\,\Pi_1} = \frac{\Pi_2\,\triangle_3}{w} = \sqrt{\frac{\Pi_2\,\triangle_3}{\Pi_0\,\Pi_1}} \qquad (258.)$$

$$\frac{p}{\sin\beta} = \frac{w}{\Pi_0\,\Pi_2} = \frac{\Pi_1\,\triangle_3}{w} = \sqrt{\frac{\Pi_1\,\triangle_3}{\Pi_0\,\Pi_2}}$$

$$\frac{q}{\sin\gamma} = \frac{w}{\Pi_0\,\Pi_3} = \frac{\Pi_1\,\triangle_2}{w} = \sqrt{\frac{\Pi_1\,\triangle_2}{\Pi_0\,\Pi_3}}$$

$$\frac{l}{\sin\alpha'} = \frac{w}{\Pi_2\,\Pi_3} = \frac{\triangle_0\,\Pi_1}{w} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\Pi_1}{\Pi_2\,\Pi_3}}$$

$$\frac{m}{\sin\beta'} = \frac{w}{\Pi_1\,\Pi_3} = \frac{\triangle_0\,\Pi_2}{w} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\Pi_2}{\Pi_1\,\Pi_3}}$$

$$\frac{n}{\sin\gamma'} = \frac{w}{\Pi_1\,\Pi_2} = \frac{\triangle_0\,\Pi_3}{w} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\Pi_3}{\Pi_1\,\Pi_2}}$$

und nach 188 und 186 ist

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{3\,\mathfrak{T}}{2\,\triangle_0\,\Pi_1} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\Pi_1\,\triangle_2\,\triangle_3}{\triangle_0^2\,\Pi_1^2}} = \sqrt{\frac{\triangle_2\,\triangle_3}{\triangle_0\,\Pi_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{\triangle_2^2\,\triangle_3^2}{\triangle_0\,\Pi_1\,\triangle_2\,\triangle_3}} = \frac{2\,\triangle_2\,\triangle_3}{3\,\mathfrak{T}}$$

also

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_0\,\Pi_1} = \frac{2\,\triangle_2\,\triangle_3}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_2\,\triangle_3}{\triangle_0\,\Pi_1}} \qquad (259.)$$

$$\frac{p}{\sin\beta} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_0\,\Pi_2} = \frac{2\,\triangle_1\,\triangle_3}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_1\,\triangle_3}{\triangle_0\,\Pi_2}}$$

$$\frac{q}{\sin\gamma} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_0\,\Pi_3} = \frac{2\,\triangle_1\,\triangle_2}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_1\,\triangle_2}{\triangle_0\,\Pi_3}}$$

$$\frac{l}{\sin\alpha'} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_2\,\Pi_3} = \frac{2\,\triangle_0\,\triangle_1}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\triangle_1}{\triangle_2\,\Pi_3}}$$

$$\frac{m}{\sin\beta'} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_1\,\Pi_3} = \frac{2\,\triangle_0\,\triangle_2}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\triangle_2}{\triangle_1\,\Pi_3}}$$

$$\frac{n}{\sin\gamma'} = \frac{3\mathfrak{T}}{2\,\triangle_1\,\Pi_2} = \frac{2\,\triangle_0\,\triangle_3}{3\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\triangle_0\,\triangle_3}{\triangle_1\,\Pi_2}}$$

§. 140.

Nach 258 ist nun weiter:

$$\Pi_0\,\Pi_1\,u = w\sin\alpha \text{ und } w\,u = \Pi_2\,\triangle_3\sin\alpha$$

also

$$u\sin\alpha = \frac{w\sin^2\alpha}{\Pi_0\,\Pi_1} = \frac{\Pi_2\,\triangle_3\sin^2\alpha}{w} = \frac{\Pi_0\,\Pi_1\,u^2}{w} = \frac{w\,u^2}{\Pi_2\,\triangle_3} \qquad (260.)$$

$$p\sin\beta = \frac{w\sin^2\beta}{\Pi_0\,\Pi_2} = \frac{\Pi_1\,\triangle_3\sin^2\beta}{w} = \frac{\Pi_0\,\Pi_2\,p^2}{w} = \frac{w\,p^2}{\Pi_1\,\triangle_3}$$

$$q\sin\gamma = \frac{w\sin^2\gamma}{\Pi_0\,\Pi_3} = \frac{\Pi_1\,\triangle_2\sin^2\gamma}{w} = \frac{\Pi_0\,\Pi_3\,q^2}{w} = \frac{w\,q^2}{\Pi_1\,\triangle_2}$$

$$l\sin\alpha' = \frac{w\sin^2\alpha'}{\Pi_2\,\Pi_3} = \frac{\Pi_0\,\triangle_1\sin^2\alpha'}{w} = \frac{\Pi_2\,\Pi_3\,l^2}{w} = \frac{w\,l^2}{\Pi_0\,\triangle_1}$$

$$m\sin\beta' = \frac{w\sin^2\beta'}{\Pi_1\,\Pi_3} = \frac{\Pi_0\,\triangle_2\sin^2\beta'}{w} = \frac{\Pi_0\,\Pi_3\,m^2}{w} = \frac{w\,m^2}{\Pi_0\,\triangle_2}$$

$$n\sin\gamma' = \frac{w\sin^2\gamma'}{\Pi_1\,\Pi_2} = \frac{\Pi_0\,\triangle_3\sin^2\gamma'}{w} = \frac{\Pi_1\,\Pi_2\,n^2}{w} = \frac{w\,n^2}{\Pi_0\,\triangle_3}$$

Eben so ist nach 259

$$2\,\triangle_0\,\Pi_1\,u = 3\mathfrak{T}\sin\alpha \text{ und } 3\mathfrak{T}\,u = 2\,\triangle_2\,\triangle_3\sin\alpha$$

also

$$u \sin\alpha = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\alpha}{2\triangle_0 \Pi_1} = \frac{2\triangle_2\triangle_3\sin^2\alpha}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_0\Pi_1 u^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}u^2}{2\triangle_2\triangle_3} \quad (261.)$$

$$p \sin\beta = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\beta}{2\triangle_0 \Pi_2} = \frac{2\triangle_1\triangle_3\sin^2\beta}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_0\Pi_2 p^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}p^2}{2\triangle_1\triangle_3}$$

$$q \sin\gamma = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\gamma}{2\triangle_0 \Pi_3} = \frac{2\triangle_1\triangle_2\sin^2\gamma}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_0\Pi_3 q^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}q^2}{2\triangle_1\triangle_2}$$

$$l \sin\alpha' = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\alpha'}{2\triangle_2 \Pi_3} = \frac{2\triangle_0\triangle_1\sin^2\alpha'}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_2\Pi_3 l^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}l^2}{2\triangle_0\triangle_1}$$

$$m \sin\beta' = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\beta'}{2\triangle_1 \Pi_3} = \frac{2\triangle_0\triangle_2\sin^2\beta'}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_1\Pi_3 m^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}m^2}{2\triangle_0\triangle_2}$$

$$n \sin\gamma' = \frac{3\mathfrak{T}\sin^2\gamma'}{2\triangle_1 \Pi_2} = \frac{2\triangle_0\triangle_3\sin^2\gamma'}{3\mathfrak{T}} = \frac{2\triangle_1\Pi_2 n^2}{3\mathfrak{T}} = \frac{3\mathfrak{T}n^2}{2\triangle_0\triangle_3}$$

Bei dem Gebrauche dieser Formeln ist nicht zu vergessen, dass nach 169 ist: $\Pi_0\triangle_1 = \Pi_1\triangle_0$ u. s. w.

Vierzehntes Capitel.

Analyse von Carnot's „Mémoire sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points pris arbitrairement dans l'espace." Paris 1806.

(Nach der Uebersetzung in „Geometrie der Stellung von L. N. M. Carnot; übersetzt von H. C. Schumacher." Altona 1810. Bnd. II. pag. 254.)*)

---

§. 141.

Carnot's schon im Vorwort des ersten Theiles der „Tetraedrometrie" besprochenes „Mémoire etc." ist ein erster und einziger Anfang, welcher bisher in der Literatur mit der Lösung der umfangreichen Aufgabe gemacht worden ist: durch sechs gegebene Bestimmungsstücke eines Tetraeders jedes geforderte siebente auszudrücken. Es ist also in gewisser Hinsicht als ein Anfang der Tetraedrometrie zu betrachten; er umfasst von deren Aufgaben eine einzelne Gruppe, nämlich diejenige, welche als gegebene Bestimmungsstücke die sechs Kanten nimmt. Sie entspricht derjenigen Gruppe der trigonometrischen Aufgaben, die verschiedene Bestimmungsstücke des ebnen Dreiecks durch die drei Seiten desselben ausdrückt. So wie aber alle diese Dreieck-Aufgaben ohne eigentliche Trigonometrie, d. h. ohne Anwendung der Winkelfunctionen gelöst wer-

---

*) Da ich an dieser Schrift manche Ausstellungen zu machen habe, so wäre ich es wohl den Manen des berühmten und ehrwürdigen Autors schuldig gewesen, mich an das authentische Original zu halten. Aber weder durch den Buchhandel, noch auf anderem Wege habe ich desselben habhaft werden können.

den können, mit deren Hereinziehung aber meist kürzer und einfacher gelöst werden: so hat Carnot seine tetraedrischen Aufgaben ohne Tetraedrometrie gelöst d. h. er hat dabei wohl die Winkelfunctionen, nicht aber die Eckenfunctionen benutzt. Dass aber die ihm zu Gebote stehenden Mittel nicht die der Natur der Sache entsprechenden waren, zeigt sich in der abschreckenden Weitschweifigkeit der Rechnungen, die er durchgeführt, aber in seiner Schrift nicht dargestellt, sondern nur angedeutet hat. Nicht einmal der Uebersetzer der Schrift, Schumacher, hat sich, wie es scheint, entschliessen können, die gegebenen Resultate auf den entsetzlich langweiligen Wegen nochmals zu suchen und zu prüfen. Der unten zur sechsten Aufgabe bemerkte Fehler, der augenscheinlich weder Druckfehler, noch Uebersetzungsfehler ist, so wie das Ignoriren mehrerer bei der achtzehnten Aufgabe besprochenen von Carnot übersehenen Mängel und der falschen Auflösung der fünfundzwanzigsten Aufgabe spricht wenigstens für diese Vermuthung. — Wenn man nun dieselben Aufgaben mit Benuzzung der Eckenfunctionen löst, und diese Auflösungen mit den Carnot'schen vergleicht, so springt in die Augen, wie der tetraedrometrische Weg der für solche Aufgaben naturgemässe ist, der trigonometrische aber ein weiter Umweg, und dass die Tetraedrometrie für die Geometrie dreier Dimensionen eine eben so nothwendige Ergänzung ist, wie die Trigonometrie für die Planimetrie. — Für die Darstellung einer neuen Disciplin, deren Bedeutung und Nothwendigkeit für die Wissenschaft erst noch zu constatiren ist, kann es nur als ein besonders willkommener Umstand begrüsst werden, dass eine Gruppe von Aufgaben, welche dieser Disciplin angehört, auch ohne dieselbe schon einmal behandelt worden ist, weil sich dadurch die beste Gelegenheit bietet, die Macht der neuen Gesetze durch Vergleichung darzulegen. Diesen Umstand zu benutzen möge sich dieses Capitel ganz dem Carnot'schen Memoire anschliessen, indem den dort gegebenen trigonometrischen Auflösungen die tetraedrometrischen gegenübergestellt werden. Bei der Darstellung der ersteren werden manche Kürzungen statthaft sein. Ausserdem erlaube ich mir — und ich hoffe damit dem Leser den Ueberblick zu erleichtern — eine Aenderung der Buchstabenbezeichnung, indem ich auch die Car-

not'schen Auflösungen mit den im 11. Capitel gewählten Bezeichnungen darstelle.

Indem nun aber die Aufgaben tetraedrometrisch gelöst werden, treten die auszudrückenden Grössen nicht bloss mit den sechs Kanten, sondern mit manchen andern tetraedrischen Bestimmungsstücken in Verbindung. Dabei kommen manche beachtenswerthe Formeln zum Vorschein, und werden manche Aufgaben nebenher gelöst, die nicht in das Carnot'sche Memoire gehören. Ich werde mich daher überhaupt nicht streng an die Carnot'sche Hauptaufgabe binden, sondern mir hin und wieder Excurse auf naheliegendes Gebiet erlauben.

§. 142.

Die drei ersten Aufgaben des Carnot'schen Memoires suchen die Ausdrücke für die Höhe h_0 und den Inhalt $\mathfrak{T}$ des Tetraeders durch die sechs Kanten l, m, n, u, p, q.

1) Die erste Aufgabe sucht vorbereitend eine Gleichung zwischen den sechs Verbindungslinien von vier Puncten in einer Ebne.

Gehen von den Eckpuncten A, B, C eines ebnen Dreiecks, dessen Seiten $BC = l$, $AC = m$, $AB = n$ sind, nach einem beliebigen Puncte H derselben Ebne die drei geraden Linien a, b, c, so sind entweder die drei Winkel (bc), (ac), (ab) zusammen gleich vier rechten, oder es ist einer von ihnen gleich der Summe der beiden andern, also ist (vergl. die Anmerkung zum ersten Capitel pg. 11)

$$0 = 1 - \cos^2(bc) - \cos^2(ac) - \cos^2(ab) + 2\cos(bc)\cos(ac)\cos(ab)$$

Nun ist

$$\cos(bc) = \frac{b^2 + c^2 - l^2}{2bc}, \quad \cos(ac) = \frac{a^2 + c^2 - m^2}{2ac},$$

$$\cos(ab) = \frac{a^2 + b^2 - n^2}{2ab}$$

also ist

$$0 = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - l^2}{2bc}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - m^2}{2ac}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - n^2}{2ab}\right)^2 + 2\,\frac{b^2 + c^2 - l^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 + c^2 - m^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - n^2}{2ab}$$

die gesuchte Gleichung, deren Entwickelung ergiebt:

$$\left.\begin{array}{l} l^4a^2 + l^2a^4 + m^4b^2 + m^2b^4 + n^4c^2 + n^2c^4 \\ + l^2m^2n^2 + l^2b^2c^2 + a^2m^2c^2 + a^2b^2n^2 \\ - a^2b^2m^2 - a^2b^2l^2 - a^2c^2l^2 - a^2c^2n^2 - b^2c^2m^2 - b^2c^2n^2 \\ - a^2l^2m^2 - a^2l^2n^2 - b^2m^2l^2 - b^2m^2n^2 - c^2n^2l^2 - c^2m^2n^2 \end{array}\right\} = 0 \qquad (262.)$$

2) Daraus ergiebt sich nun die Gleichung zwischen den sechs Verbindungslinien von vier Puncten im Raume und der Höhe h_0 ihres Tetraeders so:

Wird auf der vorigen Ebne im Puncte H eine Normale errichtet, und darauf $HO = h_0$ abgetragen, und ist $OA = u$, $OB = p$, $OC = q$, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen h_0, l, m, n, u, p, q, indem man in die Gleichung 262 oder in die ihr vorhergehende setzt: $a^2 = u^2 - h_0^2$, $b^2 = p^2 - h_0^2$, $c^2 = q^2 - h_0^2$, nämlich:

$$\begin{array}{l} 0 = 4(u^2-h_0^2)(p^2-h_0^2)(q^2-h_0^2) - (u^2-h_0^2)(p^2+q^2-l^2-2h_0^2)^2 \\ \quad - (p^2-h_0^2)(u^2+q^2-m^2-2h_0^2)^2 - (q^2-h_0^2)(u^2+p^2-n^2-2h_0^2)^2 \\ \quad + (p^2+q^2-l^2-2h_0^2)(u^2+q^2-m^2-2h_0^2)(u^2+p^2-n^2-2h_0^2) \end{array}$$

Wenn man diese Gleichung entwickelt und ordnet, so werden die Coefficienten von h_0^6 und von h_0^4 Null, und es kommt:

$$\begin{array}{l} 0 = h_0^2(2m^2n^2 + 2l^2n^2 + 2l^2m^2 - l^4 - m^4 - n^4) \qquad (263.) \\ \quad + l^4u^2 + l^2u^4 + m^4p^2 + m^2p^4 + n^4q^2 + n^2q^4 \\ \quad + l^2m^2n^2 + l^2p^2q^2 + u^2m^2q^2 + u^2p^2n^2 \\ \quad - l^2m^2u^2 - l^2m^2p^2 - l^2n^2u^2 - l^2n^2q^2 - m^2n^2p^2 - m^2n^2q^2 \\ \quad - l^2u^2p^2 - m^2u^2p^2 - l^2u^2q^2 - n^2u^2q^2 - m^2p^2q^2 - n^2p^2q^2 \end{array}$$

3) In dieser Gleichung ist nun der Coefficient von h_0^2, nämlich

$$2m^2n^2 + 2l^2n^2 + 2l^2m^2 - l^4 - m^4 - n^4$$

bekanntlich der Ausdruck für das 16fache Quadrat des Flächeninhaltes des ebnen Dreiecks, dessen Seiten l, m, n sind, also $16\triangle_0^2$, also giebt die obige Gleichung auch den Inhalt $\mathfrak{T}$ des Tetraeders, nämlich:

$$\begin{array}{l} h_0^2 \cdot 16\triangle_0^2 = 16 \cdot 9\mathfrak{T}^2 = \qquad (264.) \\ \quad - l^4u^2 - l^2u^4 - m^4p^2 - m^2p^4 - n^4q^2 - n^2q^4 \\ \quad - l^2m^2n^2 - l^2p^2q^2 - u^2m^2q^2 - u^2p^2n^2 \\ \quad + l^2m^2u^2 + l^2m^2p^2 + l^2n^2u^2 + l^2n^2q^2 + m^2n^2p^2 + m^2n^2q^2 \\ \quad + l^2u^2p^2 + m^2u^2p^2 + l^2u^2q^2 + n^2u^2q^2 + m^2p^2q^2 + n^2p^2q^2 \end{array}$$

Sind die drei vom Gipfel O ausgehenden Kanten gleich, also $u = p = q$, so wird diese Gleichung

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 = u^2(2\,m^2n^2 + 2\,l^2n^2 + 2\,l^2m^2 - l^4 - m^4 - n^4) - l^2m^2n^2$$
$$= 16\,\triangle_0^2 u^2 - l^2m^2n^2 \qquad (265.)$$

§. 143.

Tetraëdrometrische Auflösung.

Mit Uebergehung der ersten (planimetrischen) Aufgabe finden wir sogleich nach der Formel 11 mit den im 11. Capitel festgesetzten Bezeichnungen:

$$4 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 = 4\,u^2p^2q^2P_0^2$$
$$= u^2p^2q^2(1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2\cos a_0 \cos b_0 \cos c_0)$$
$$= u^2p^2q^2\left\{1 - \left(\frac{p^2+q^2-l^2}{2pq}\right)^2 - \left(\frac{u^2+q^2-m^2}{2uq}\right)^2 - \left(\frac{u^2+p^2-n^2}{2up}\right)^2 + \frac{2(p^2+q^2-l^2)(u^2+q^2-m^2)(u^2+p^2-n^2)}{2pq \cdot 2uq \cdot 2up}\right\}$$

woraus durch eine leichte Entwickelung die Gleichung 264 hervorgeht. — Ersetzt man darin $16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2$ durch $16\,\triangle_0^2 h_0^2$, so erhält man die Gleichung 263 für h_0. — Will man auch noch die Gleichung 262 haben, die von Carnot offenbar nur als Lemma herangezogen ist, so braucht man nur den Gipfel O in die Ebne der Basis $\triangle_0$ zu verlegen, also $\mathfrak{T} = 0$ oder $h_0 = 0$ und $u = a$, $p = b$, $q = c$ zu setzen.

§. 144.

Die Gleichungen 262. 263. 264 sind in dieser Gestalt, in welcher sie Carnot mitgetheilt hat, nicht geeignet grosses Interesse in Anspruch zu nehmen, da sie kein einfaches Gesetz markiren. Durch folgende Umformungen gewinnen sie an durchsichtiger und eleganter Gestaltung:

$$16\,\triangle_0^2 = 2\,m^2n^2 + 2\,l^2n^2 + 2\,l^2m^2 - l^4 - m^4 - n^4 \qquad (266.)$$
$$= (l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)$$
$$= l^2(-l^2+m^2+n^2) + m^2(l^2-m^2+n^2) + n^2(l^2+m^2-n^2)$$

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 = (l^2+u^2)(-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2) - l^2p^2q^2 \quad (267.)$$
$$+(m^2+p^2)(\ \ l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2) - u^2m^2q^2$$
$$+(n^2+q^2)(\ \ l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2) - u^2p^2n^2$$
$$-l^2m^2n^2$$

oder auch:

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 = l^2u^2\ (-l^2-u^2+m^2+p^2+n^2+q^2) - l^2p^2q^2 \quad (268.)$$
$$+m^2p^2(\ \ l^2+u^2-m^2-p^2+n^2+q^2) - u^2m^2q^2$$
$$+n^2q^2\ (\ \ l^2+u^2+m^2+p^2-n^2-q^2) - u^2p^2n^2$$
$$-l^2m^2n^2$$

wobei man sich erinnere, dass l und u, m und p, n und q je zwei Gegenkanten des Tetraeders und die in den letzten vier Gliedern verbundenen je drei Kanten l, p, q u. s. w. die Seiten je eines der Dreiecke $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_0$ sind.

§. 145.

Carnots Aufgabe IV: Den Halbmesser der dem Tetraeder umschriebenen Kugel durch die Kanten auszudrücken.

Carnot's Auflösung.

„Stellt man sich vom Mittelpuncte dieser Kugel Linien in die vier Winkel (Ecken) der Pyramide gezogen vor, so werden diese Linien (welche die gesuchten Halbmesser sind,) die Pyramide in vier andere zerlegen, deren körperlichen Inhalt man durch die Formel 265 findet. Setzt man den Inhalt dieser vier Pyramiden dem Inhalte der ganzen gleich, den man aus 264 findet, so hat man nach Reductionen folgende Formel“:

$$4\,r^2(u^4l^2+u^2l^4+p^4m^2+p^2m^4+q^4n^2+q^2n^4 \quad (269.)$$
$$+l^2p^2q^2+u^2m^2q^2+u^2p^2n^2+l^2m^2n^2$$
$$-l^2m^2p^2-m^2n^2p^2-m^2u^2p^2-l^2u^2p^2$$
$$-m^2p^2q^2-n^2p^2q^2-l^2m^2u^2-l^2n^2u^2$$
$$-m^2n^2q^2-l^2n^2q^2-l^2u^2q^2-n^2u^2q^2)$$
$$+2\,m^2n^2p^2q^2+2\,l^2n^2u^2q^2+2\,l^2m^2u^2p^2$$
$$-l^4u^4-m^4p^4-n^4q^4 = 0$$

Gross ist die Resignation, die dazu gehört, das Resultat auf diesem Wege, dessen Länge und Mühseligkeit durch die obigen zwei Worte: „nach Reductionen“ nicht verhältnissmässig angedeutet ist, zu erreichen. Es soll nach unserer Bezeichnung die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

(worin aber die Vorzeichen nach der in §. 118 besprochenen Weise zu modificiren sind,) durch r und die sechs Kanten ausgedrückt und in Beziehung auf r aufgelöst, oder wenigstens rational gemacht werden. Nun ist nach 265

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{p}_0^2 = r^2 (2\,m^2 n^2 + 2\,l^2 n^2 + 2\,l^2 m^2 - l^4 - m^4 - n^4) - l^2 m^2 n^2$$

und hierin der Coefficient von r^2 bekanntlich $16\,\Delta_0^2$, und $lmn = 2\,\varrho_0 \sin a_1 \cdot mn = 4\,\varrho_0 \Delta_0$, also kann man kürzer schreiben:

$$9\,\mathfrak{p}_0^2 = r^2 \Delta_0^2 - \varrho_0^2 \Delta_0^2 = (r^2 - \varrho_0^2)\,\Delta_0^2$$

also ist die Gleichung

$$3\,\mathfrak{T} = \Delta_0 \sqrt{r^2 - \varrho_0^2} + \Delta_1 \sqrt{r^2 - \varrho_1^2} + \Delta_2 \sqrt{r^2 - \varrho_2^2} + \Delta_3 \sqrt{r^2 - \varrho_3^2}$$

in Beziehung auf r^2 aufzulösen, und zuletzt für $3\,\mathfrak{T}$, $\Delta_0 \ldots$, $\varrho_0 \Delta_0 \ldots$ die durch die Kanten ausgedrückten Werthe einzusetzen, — ein Weg, auf welchen dem Autor zu folgen das unter 269 angegebene, in dieser Gestalt eben nicht interessante Resultat wohl Niemanden verlocken möchte.

Crelle in „Sammlung mathematischer Aufsätze“ Bd. I. Berlin 1821 pg. 112 f. hat eine leichter durchzuführende Auflösung gegeben und das Resultat auch in eine elegantere Form gebracht.

§. 146.

Tetraedrometrische Auflösung.

Wendet man die Gleichungen 151 und 155 (§. 97) auf das Polar-Hexaeder an, welches die Normalen d_1, d_2, d_3 (§. 103) mit den Kantentheilen u_0, p_0, q_0 (§. 107) bestimmen, so findet sich:

$$2\,\Pi_0 r_0^2 = d_1 u_0 \sin\alpha + d_2 p_0 \sin\beta + d_3 q_0 \sin\gamma$$

und

$$2\,\Pi_0 d_1 = u_0 \sin\alpha - p_0 \sin\beta \cos\gamma - q_0 \sin\gamma \cos\beta$$

u. s. w.

Ist nun der Punct K, von dem aus die d_1, d_2, d_3 gefällt sind, der Mittelpunct der dem Tetraeder umschriebenen Kugel, so ist offenbar

$$u_0 = \tfrac{1}{2}u,\ p_0 = \tfrac{1}{2}p,\ q_0 = \tfrac{1}{2}q$$

also

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1 u \sin\alpha + d_2 p \sin\beta + d_3 q \sin\gamma \qquad (270.)$$

$$4\,\Pi_0 d_1 = u \sin\alpha - p \sin\beta\cos\gamma - q \sin\gamma\cos\beta \qquad (271.)$$

Der Kürze halber bezeichnen wir:

$$u\sin\alpha = \upsilon \qquad l\sin\alpha' = \lambda$$

$$p\sin\beta = \pi \qquad m\sin\beta' = \mu$$

$$q\sin\gamma = \varkappa \qquad n\sin\gamma' = \nu$$

Die Gleichung 270 giebt nun durch Vertauschung der Ecken noch drei andere, wodurch diese Gruppe besteht:

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1\upsilon + d_2\pi + d_3\varkappa \qquad (272.)$$

$$4\,\Pi_1 r^2 = d_0\upsilon + d_2\nu + d_3\mu$$

$$4\,\Pi_2 r^2 = d_0\pi + d_1\nu + d_3\lambda$$

$$4\,\Pi_3 r^2 = d_0\varkappa + d_1\mu + d_2\lambda$$

Multiplicirt man die drei letzten dieser Gleichungen der Reihe nach mit λ, μ, ν, so ergiebt die Addition je zweier und Subtraction der dritten:

$$4\,r^2(-\Pi_1\lambda + \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) = d_0\overline{X} + 2\,d_1\mu\nu \qquad (273.)$$

$$4\,r^2(\ \ \Pi_1\lambda - \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) = d_0\overline{Y} + 2\,d_2\lambda\nu$$

$$4\,r^2(\ \ \Pi_1\lambda + \Pi_2\mu - \Pi_3\nu) = d_0\overline{Z} + 2\,d_3\lambda\mu$$

worin bedeutet:

$$\overline{X} = -\upsilon\lambda + \pi\mu + \varkappa\nu \qquad (273.^*)$$

$$\overline{Y} = \ \ \upsilon\lambda - \pi\mu + \varkappa\nu$$

$$\overline{Z} = \ \ \upsilon\lambda + \pi\mu - \varkappa\nu$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\upsilon\lambda$, $\pi\mu$, $\varkappa\nu$, so ergiebt die Addition

$$4\,r^2(\Pi_1\lambda\overline{X} + \Pi_2\mu\overline{Y} + \Pi_3\nu\overline{Z}) = d_0(\upsilon\lambda\overline{X} + \pi\mu\overline{Y} + \varkappa\nu\overline{Z}) + 2\lambda\mu\nu(d_1\upsilon + d_2\pi + d_3\varkappa)$$

und da nach 272

$$d_1\upsilon + d_2\pi + d_3\varkappa = 4\,\Pi_0 r^2,$$

$$4\,r^2(\Pi_1\lambda\overline{X} + \Pi_2\mu\overline{Y} + \Pi_3\nu\overline{Z} - 2\,\Pi_0\lambda\mu\nu) = d_0(\upsilon\lambda\overline{X} + \pi\mu\overline{Y} + \varkappa\nu\overline{Z}) \qquad (274.)$$

2) Die Gleichung 271 ist zu schreiben:

$$4\,\Pi_0 d_1 = \upsilon - \pi\cos\gamma - \varkappa\cos\beta$$

aus welcher, wenn wir sie auf d_0 übertragen, die drei folgenden hervorgehn:

$$\begin{aligned} 4\,\Pi_1 d_0 &= v - \mu\cos\gamma' - \nu\cos\beta' \\ 4\,\Pi_2 d_0 &= \pi - \lambda\cos\gamma' - \nu\cos\alpha' \\ 4\,\Pi_3 d_0 &= \varkappa - \lambda\cos\beta' - \mu\cos\alpha' \end{aligned} \qquad (275.)$$

Multipliciren wir sie der Reihe nach mit λ, μ, ν, so ergiebt die Addition je zweier und Subtraction der dritten:

$$\begin{aligned} 4\,d_0(-\Pi_1\lambda + \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) &= \overline{X} - 2\,\mu\nu\cos\alpha' \\ 4\,d_0(\ \Pi_1\lambda - \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) &= \overline{Y} - 2\,\lambda\nu\cos\beta' \\ 4\,d_0(\ \Pi_1\lambda + \Pi_2\mu - \Pi_3\nu) &= \overline{Z} - 2\,\lambda\mu\cos\gamma' \end{aligned} \qquad (276.)$$

worin $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ dieselbe Bedeutung haben wie in 273.

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $\Pi_1\lambda$, $\Pi_2\mu$, $\Pi_3\nu$ multiplicirt hat, und berücksichtigt bei den letzten Gliedern rechts die Gleichung 20. b, so wird

$$4\,d_0\left\{\begin{aligned} &\Pi_1\lambda(-\Pi_1\lambda + \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) \\ &+\Pi_2\mu(\Pi_1\lambda - \Pi_2\mu + \Pi_3\nu) \\ &+\Pi_3\nu(\Pi_1\lambda + \Pi_2\mu - \Pi_3\nu) \end{aligned}\right\} = \begin{aligned} &\Pi_1\lambda\overline{X} + \Pi_2\mu\overline{Y} + \Pi_3\nu\overline{Z} \\ &- 2\,\Pi_0\lambda\mu\nu \end{aligned} \qquad (277.)$$

Der auf der linken Seite stehende Coefficient von $4\,d_0$ vereinfacht sich sehr durch die Gleichungen 260 (§. 140), aus denen hervorgeht:

$$\Pi_1\lambda = \frac{w}{\Delta_0}\,l^2,\ \Pi_2\mu = \frac{w}{\Delta_0}\,m^2,\ \Pi_3\nu = \frac{w}{\Delta_0}\,n^2 \qquad (278.)$$

wodurch der genannte Coefficient vermöge 266 sich reducirt auf $16\,w^2$. — Die rechte Seite von 277 enthält aber dasselbe, was in 274 Coefficient von $4\,r^2$ ist, also wird diese Gleichung 274 nach Division durch d_0:

$$16\cdot 4\,w^2\cdot 4\,r^2 = v\lambda\overline{X} + \pi\mu\overline{Y} + \varkappa\nu\overline{Z} \qquad (279.)$$

3) Die rechte Seite dieser Gleichung ist ausschliesslich aus den Grössen

$$v\lambda = u\,l\sin\alpha\sin\alpha',\ \pi\mu = p\,m\sin\beta\sin\beta',\ \varkappa\nu = q\,n\sin\gamma\sin\gamma'$$

zusammengesetzt. Nun ist aber nach 191

$$\mathfrak{M} = \frac{u\,l}{\sin\alpha\sin\alpha'} = \frac{u^2l^2}{v\lambda} = \frac{v\lambda}{\sin^2\alpha\,\sin^2\alpha'}$$

also:

$$\mathfrak{M}\,\upsilon\lambda = u^2 l^2, \qquad \frac{\upsilon\lambda}{\mathfrak{M}} = \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \tag{280.}$$

$$\mathfrak{M}\,\pi\mu = p^2 m^2, \qquad \frac{\pi\mu}{\mathfrak{M}} = \sin^2\alpha \sin^2\beta'$$

$$\mathfrak{M}\,\varkappa\nu = q^2 n^2, \qquad \frac{\varkappa\nu}{\mathfrak{M}} = \sin^2\gamma \sin^2\gamma'$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M}\,\overline{X} = -u^2 l^2 + p^2 m^2 + q^2 n^2 = \overset{(4)}{X} \tag{281.}$$

$$\mathfrak{M}\,\overline{Y} = u^2 l^2 - p^2 m^2 + q^2 n^2 = \overset{(4)}{Y}$$

$$\mathfrak{M}\,\overline{Z} = u^2 l^2 + p^2 m^2 - q^2 n^2 = \overset{(4)}{Z}$$

(worin X^4, Y^4, Z^4 neugewählte Zeichen sind) und da nach 180: $\mathfrak{M} \cdot 2w = 3\,\mathfrak{T}$ ist, so geht die Gleichung 277, wenn sie mit $\mathfrak{M}_2$ multiplicirt wird, über in

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 \cdot 4\,r^2 = u^2 l^2 \overset{(4)}{X} + p^2 m^2 \overset{(4)}{Y} + q^2 n^2 \overset{(4)}{Z} \tag{282.}$$

und wenn die Form 267 für $16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2$ mit den Abkürzungszeichen 281 geschrieben wird

$$4\,r^2 \left\{ \begin{array}{r} (l^2 + u^2) \overset{(4)}{X} - l^2 p^2 q^2 \\ + (m^2 + p^2) \overset{(4)}{Y} - u^2 m^2 q^2 \\ + (n^2 + q^2) \overset{(4)}{Z} - u^2 p^2 n^2 \\ - l^2 m^2 n^2 \end{array} \right\} = l^2 u^2 \overset{(4)}{X} + m^2 p^2 \overset{(4)}{Y} + n^2 q^2 \overset{(4)}{Z} \tag{283.}$$

oder

$$4\,r^2 \left\{ \begin{array}{l} (l^2+u^2)(-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2) \\ +(m^2+p^2)(l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2) \\ +(n^2+q^2)(l^2u^2-m^2p^2-n^2q^2) \\ -l^2p^2q^2 - u^2m^2q^2 - u^2p^2n^2 \\ \qquad - l^2m^2n^2 \end{array} \right\} = \begin{array}{l} l^2u^2(-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2) \\ +m^2p^2(l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2) \\ +n^2q^2(l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2) \end{array} \tag{284.}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Carnot'schen 269 überein, ist aber so geordnet, dass das Gesetz ihrer Zusammensetzung leicht zu erkennen ist. — Durch Umformung der rechten Seite erhalten wir noch die Formen:

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 \cdot 4\,r^2 = 2m^2p^2n^2q^2 + 2l^2u^2n^2q^2 + 2l^2u^2m^2p^2 \tag{285.}$$
$$- l^4u^4 - m^4p^4 - n^4q^4$$

$$= (lu + mp + nq)(-lu + mp + nq)(lu - mp + nq) \tag{286.}$$
$$(lu + mp - nq)$$

welche in merkwürdiger Weise den Formen für 16 $\triangle^2$ (266) entsprechen, so dass also in gewisser Beziehung dem ebnen Dreieck in drei Dimensionen nicht das Tetraeder $\mathfrak{T}$, sondern das Product $2r \cdot 3\mathfrak{T}$ analog erscheint. — Anderseits erinnert das Resultat 282 in Vergleich mit 267 daran, dass auch für das ebne Dreieck das Product $4\varrho_0 \triangle_0 = lmn$ sich durch die Seiten einfacher ausdrücken lässt, als der Inhalt $\triangle_0$. — Die Form 286 findet sich — wahrscheinlich zuerst — in Crelle's „Sammlung math. Aufsätze" Erster Bnd. Berlin 1821 pg. 117. — Die Form der in den Gleichungen 279 und 284 rechts stehenden Ausdrücke erinnert an die ähnliche der in §. 30 mit L und Δ bezeichneten Grössen. Im folgenden Capitel werden wir sehen, warum der übereinstimmende Bau dieser Ausdrücke so vielen in tetraedrischen Rechnungen vorkommenden Grössen eigen ist.

§. 147.

In der Entwickelung des vorigen Paragraphen liegt noch die Auflösung der folgenden, von Carnot nicht aufgenommenen Aufgabe:

Den Abstand (d_0) des Mittelpunctes der einem Tetraeder umschriebenen Kugel von einer Seitenfläche ($\triangle_0$), so wie die Theiltetraeder ($\mathfrak{p}_0$), in welche das $\mathfrak{T}$ durch die nach den Ecken gezogenen Radien der umschriebenen Kugel zerlegt wird, durch die Kanten auszudrücken.

Auflösung. Die in 274 und 277 vorkommende Grösse $2\Pi_0\lambda\mu\nu$ wird vermöge der drei letzten Gleichungen 260, wenn wir davon zwei Ausdrücke der letzten Columne mit einem der vorletzten multipliciren, und 169 berücksichtigen:

$$2\Pi_0\lambda\mu\nu = \frac{2w}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{l^2m^2n^2}{\triangle_0} \qquad (287.)$$

so dass die Gleichung 277 vermöge 278 nach Multiplication mit $\frac{\triangle_0}{w}$ diese Gestalt bekommt:

$$32\triangle_0 d_0 \cdot 2w = l^2\overline{X} + m^2\overline{Y} + n^2\overline{Z} - \frac{2l^2m^2n^2}{\mathfrak{M}}$$

welche durch Multiplication mit $\mathfrak{M}$ vermöge 180 u. 281 übergeht in

$$32 \cdot 3\mathfrak{T} \cdot \triangle_0 d_0 = 32 \cdot 3\mathfrak{T} \cdot 3\mathfrak{p}_0 = l^2\overset{(4)}{X} + m^2\overset{(4)}{Y} + n^2\overset{(4)}{Z} - 2l^2m^2n^2 \qquad (288.)$$

wodurch, da $\mathfrak{T}$ und Δ_0 in bekannter Weise durch die Kanten ausdrückbar sind, die Aufgabe gelöst ist.

Durch Verbindung der Gleichungen 267 und 288 ergiebt sich noch:

$$16 \cdot 9\mathfrak{T}(\mathfrak{T} - 2\mathfrak{p}_0) = 16 \cdot 9\mathfrak{T}(-\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3)$$
$$= u^2 \overset{(4)}{X} + p^2 \overset{(4)}{Y} + q^2 \overset{(4)}{Z}$$
$$-(-l^2m^2n^2 + u^2p^2n^2 + u^2q^2m^2 + p^2q^2l^2) \qquad (289.)$$

§. 148.

Carnot's Aufgabe V. Den Halbmesser der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel durch die Kanten auszudrücken.

Auflösung. Die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3$$

oder $$3\mathfrak{T} = \Delta_0 d_0 + \Delta_1 d_1 + \Delta_2 d_2 + \Delta_3 d$$

wird für den Mittelpunct der eingeschriebenen Kugel:

$$3\mathfrak{T} = d(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$$

Dieser Auflösung fügt Carnot hinzu: „Lagrange bemerkt, dass es ausser der eingeschriebenen Kugel noch vier andere gebe, die eben so wohl die vier Seitenflächen der Pyramide berühren, aber dass dann immer eine der vier Seitenflächen äusserlich von der Kugel berührt wird. Man kann leicht die Halbmesser dieser vier Kugeln finden, denn man braucht nur die Seitenfläche, welche äusserlich von der Kugel berührt wird, als negativ zu betrachten, d. h.: den Wurzelgrössen, welche sie ausdrücken, das Zeichen — zu geben. — Will man z. B. den Halbmesser der Kugel finden, die innerlich die drei Seitenflächen BOC, AOC, AOB berührt, und äusserlich ABC, so braucht man nur in der obigen Gleichung der Wurzelgrösse

$$\Delta_0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2m^2n^2 + 2l^2n^2 + 2l^2m^2 - l^4 - m^4 - n^4)}$$

das Zeichen — zu geben.“

Diese Bemerkung ist aber noch dadurch zu ergänzen, dass es ausser jenen fünf Berührungskugeln am Tetraeder noch drei giebt, deren Mittelpuncte in dreien der Aussenkeilräume liegen, wie dies schon in §. 119 besprochen ist. — Die vollständige Auflösung ist also

$$3\mathfrak{T} = d[\Delta_0] \qquad (177.)$$

worin $[\triangle_0]$ die Summe $\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3$ bedeutet mit allen den Veränderungen der Vorzeichen, welche darin je nach demjenigen der acht d, welches gesucht ist, nach §. 119 vorzunehmen sind.

Auch dieser Gleichung schickt Carnot, wie in ähnlicher Weise jeder andern seiner Auflösungen, die Bemerkung nach:

„Durch die Formel wird folgende allgemeine Aufgabe gelöst: Wenn von den sechs Kanten eines Tetraeders und dem Halbmesser der eingeschriebenen Kugel sechs gegeben sind, das siebente zu finden.“ — Dieser Zusatz hat aber unter allen Carnot'schen Aufgaben am wenigsten Berechtigung für diese, da jede der Kanten in zweien der durch die $\triangle$ bezeichneten Wurzelgrössen vorkommt, und zwar in jeder derselben in der zweiten und vierten Potenz, und daher die Auflösung der Gleichung in Bezug auf jede der sechs Kanten nicht bloss sehr weitläufig, sondern auch wegen der hohen Potenzen und hinsichtlich der Bestimmung der Vorzeichen der irrationalen Glieder sehr schwierig, vielleicht unausführbar ist.

§. 149.

Wenn man die Gleichung $3\,\mathfrak{T} = [\triangle_0]\,d$ durch $\mathfrak{M}$ dividirt, so geht sie nach 180 und 169 über in

$$2\,w = [\Pi_0]\,d \qquad (290.)$$

worin $[\Pi_0]$ die Summe $\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$ bedeutet mit denselben Modificationen der Vorzeichen, welche je nach der Lage der Berührungskugel in der Summe $[\triangle_0]$ eintreten.

Dies ist eine Gleichung zwischen den Längen w und d und den Π-sinus der vier Tetraederecken. Da aber die Länge w am Tetraeder keine in die Augen fallende oder der Anschauung zugängliche ist, so kann man dafür substituiren (nach 180):

$$2\,w = \Pi_0 h_0 = \Pi_1 h_1 = \Pi_2 h_2 = \Pi_3 h_3$$

und man hat also in der Gleichung 290 die Π-sinus der vier Tetraederecken verbunden mit irgend einer der Tetraederhöhen und irgend einem der Halbmesser der acht Berührungskugeln.

§. 150.

Die Π-sinus der Tetraeder-Ecken können nun auf mehrerlei Weise gegeben sein.

Wäre z. B. die Form des Dreiecks $\triangle_0$, d. h. zwei seiner Winkel b_2, c_3 gegeben (wodurch auch der dritte Winkel $a_1 = \pi - (b_2 + c_3)$ gegeben ist) und die drei Winkel α', β', γ', unter denen die Flächen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ gegen $\triangle_0$ geneigt sind, so hat man nach 1. b:

$$2\,\Pi_1 = \sin a_1 \sin\beta' \sin\gamma',\quad 2\,\Pi_2 = \sin b_2 \sin\alpha' \sin\gamma',$$
$$2\,\Pi_3 = \sin c_3 \sin\beta' \sin\gamma'$$

und nach 20. b:

$$\Pi_0 = \Pi_1 \cos\alpha' + \Pi_2 \cos\beta' + \Pi_3 \cos\gamma'$$

Ist nun auch noch h_0 oder d (vergl. §. 119) gegeben, so ist nach 26. b:

$$h_0 (\Pi_1 \cos\alpha' + \Pi_2 \cos\beta' + \Pi_3 \cos\gamma') = 2\,d\,(\Pi_1 \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha' + \Pi_2 \cos^2\tfrac{1}{2}\beta' + \Pi_3 \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma') \quad (291.)$$

die Gleichung zwischen b_2, c_3, α', β', γ', h_0, d; ferner nach 27. b:

$$\Pi_0 h_0 = 2\overset{o}{d}\,(\Pi_1 \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha' + \Pi_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\beta' + \Pi_3 \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma') \quad (292.)$$

die Gleichung zwischen b_2, c_3, α', β', γ', h_0, d, worin $\Pi_0 h_0$ auch durch $\Pi_1 h_1$ oder $\Pi_2 h_2$ oder $\Pi_3 h_3$ ersetzt werden kann.

Ferner ist

$$2\,w = \Pi_0 h_0 = \overset{u}{d}\,(\Pi_0 + \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_3)$$
$$= 2\overset{u}{d}\,(\Pi_1 \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha' - \Pi_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\beta' - \Pi_3 \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma') \quad (293.)$$

u. s. w., so dass die Gleichung

$$2\,w = [\Pi]\,d$$

alle die Gleichungen zwischen den fünf Winkeln b_2, c_3, α', β', γ', einer beliebigen Höhe und dem Radius einer beliebigen Berührungskügel enthält.

Oder wären von den sechs Flächenwinkeln des Tetraeders: α, β, γ, α', β', γ' fünf gegeben, so wäre der sechste, — es sei z. B. α' — durch 32. b mit gegeben, nämlich:

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,(4\,\Pi_0\Pi_1 - \cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma$$
$$- \cos\alpha(\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'))$$

(worin Π_0 durch α, β, γ, und Π_1 durch α, β', γ' auszudrücken

sind) also auch die Π_0, Π_1, Π_2, Π_3, welche nach 2. 3. 4. 5. b sämmtlich durch die Flächenwinkel des Tetraeders ausdrückbar sind; und diese sind auf die eben beschriebene Weise mit jeder der Tetraederhöhen und jedem der Radien der Berührungskugeln in der Gleichung $2w = [\Pi] d$ verbunden.

§. 151.

Carnot's Aufgabe VI.

Die Entfernung des Fusspunctes H_0 der Höhe h_0 von einem Eckpuncte der Basis $\triangle_0$ durch die sechs Kanten auszudrücken.

Auflösung:

$$\overline{H_0 A^2} = u^2 - h_0^2 = u^2 - \left(\frac{3\mathfrak{T}}{\triangle_0}\right)^2 = \frac{16\triangle_0^2 u^2 - 16 \cdot 9\mathfrak{T}^2}{16\triangle_0^2}$$

worin $16\triangle_0^2$ und $16 \cdot 9\mathfrak{T}^2$ in der bekannten Weise durch die Kanten ausgedrückt werden können.

Das Resultat lässt sich so ordnen:

$$\begin{aligned} 16\triangle_0^2 \cdot \overline{H_0 A^2} = &-(l^2+u^2)(-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2)+l^2p^2q^2 \\ &+(n^2-p^2)(\ \ l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2)+u^2p^2n^2 \\ &+(m^2-q^2)(\ \ l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2)+u^2m^2q^2 \\ &-u^2\{l^4+(m^2-n^2)^2\} \qquad\qquad +l^2m^2n^2 \end{aligned} \tag{294.}$$

Carnot's Resultat, oder wenigstens das von seinem Uebersetzer Schumacher mitgetheilte, hat auf der rechten Seite 25 Glieder. Das unsrige hat, wenn man die Klammern auflöst, 24 Glieder, indem $u^2l^4 - u^2l^4$ sich aufheben. Falsch ist jedenfalls das Schumacher'sche Resultat, denn, da es in seine einzelnen Glieder aufgelöst ist, finden sich darin, sei es durch ein Versehen des Autors, oder des Setzers, zweimal zwei Glieder, die sich aufheben (nach der dortigen Bezeichnung die Glieder $+g^2m^2n^2 - m^2n^2g^2 + m^2p^2h^2 - m^2p^2h^2$). Nach Abzug derselben bleiben 21 Glieder, was wieder mit meinem Resultate nicht übereinstimmt.

§. 152.

Auf tetraedrometrischem Wege ist die Aufgabe so zu lösen:
Bedeutet H_1 den Winkel, den die Kante u mit $\triangle_0$ macht,

so ist $AH_0 = u \cos H_1$, und $\sin H_1 = \frac{2 P_1}{\sin \alpha_1}$ (nach 10. a), also

$$\overline{AH}_0^2 = u^2 (1 - \sin^2 H_1) = \frac{u^2 (\sin^2 a_1 - 4 P_1^2)}{\sin^2 a_1}$$

und wenn wir $\sin a_1 = \frac{2 \triangle_0}{mn}$ setzen

$$\overline{AH}_0^2 = \frac{u^2 m^2 n^2}{4 \triangle_0^2} (\cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 - 2 \cos a_1 \cos b_1 \cos c_1)$$

Ersetzt man hierin $\cos b_1$ durch $\frac{u^2 + n^2 - p^2}{2 u n}$, $\cos c_1$ durch $\frac{u^2 + m^2 - q^2}{2 u m}$, $\cos a_1$ durch $\frac{m^2 + n^2 - l^2}{2 m n}$, so erhält man das obige Resultat 294.

§. 153.

Carnot's Aufgabe VII.

Die Entfernung des Fusspunctes H_0 der Höhe h_0 von einer Seite l der Basis $\triangle_0$ durch die sechs Kanten auszudrücken.

Auflösung. Die Höhe des Dreiecks $\triangle_1$, von O auf l gefällt, ist $\frac{2 \triangle_1}{l}$, und das Quadrat der gesuchten Linie ist daher

$$x^2 = \left(\frac{2 \triangle_1}{l}\right)^2 - h_0^2 = \frac{4 \triangle_1^2}{l^2} - \frac{9 \mathfrak{T}^2}{\triangle_0^2}$$

$$= \frac{4 \triangle_0^2 \triangle_1^2 - l^2 \cdot 9 \mathfrak{T}^2}{l^2 \triangle_0^2} \qquad (295.)$$

in welchem Ausdruck noch die $\triangle_0$, $\triangle_1$ nach 266 und $\mathfrak{T}$ nach 267 durch die Kanten auszudrücken sind. Die Entwickelung ergiebt jedoch kein durch seine Form bemerkenswerthes Resultat.

§. 154.

Carnot's Aufgabe VIII. IX.

Die Entfernung jedes Scheitelpunctes vom Schwerpunct des Tetraeders in Werthen der sechs Kanten auszudrücken (r_0 für den Schwerpunct).

Carnot's Auflösung besteht in den Worten:

„Nach den bekannten Lehrsätzen vom Schwerpunct hat man:

$$16\,r_0^2 = 4\,(u^2+p^2+q^2) - (l^2+m^2+n^2+u^2+p^2+q^2)$$

oder nach Reduction:

$$16\,r_0^2 = 3\,(u^2+p^2+q^2) - (l^2+m^2+n_2)\text{“} \qquad (296.)$$

Sonderbarer Weise sucht dann Carnot in einer besonderen „Aufgabe IX“ den Winkel zweier Kanten nach der schon von der Aufgabe I an vielfach gebrauchten Formel:

$$2\,p\,q\cos a_0 = p^2+q^2-l^2$$
$$2\,u\,q\cos b_0 = u^2+q^2-m^2$$
$$2\,u\,p\cos c_0 = u^2+p^2-n^2$$

um dann durch Verbindung mit 296 darzustellen:

$$16\,r_0^2 = u^2+p^2+q^2-2\,p\,q\cos a_0-2\,u\,q\cos b_0-2\,u\,p\cos c_0 \qquad (297.)$$

Die „bekannten Lehrsätze,“ aus denen diese Gleichungen unmittelbar hervorgehen, sind zu finden im vierten Abschnitt der Géometrie de position 289 (Schumacher's Uebersetzung II. pg. 80) Sie beziehen sich auf den Punct der mittleren Entfernungen für ein System beliebig vieler gegebener Puncte, so dass das Tetraeder darin nur einen besonderen Fall bildet.

§. 155.

Tetraedrometrische Auflösung.

Diese ist sehr einfach aus der in 134 entwickelten Gleichung 241

$$r_0 + r_1\cos\mathfrak{a}' + r_2\cos\mathfrak{b}' + r_3\cos\mathfrak{c}' = 0$$

herzuleiten, wenn man darin setzt:

$$\cos\mathfrak{a}' = \frac{r_2^2+r_3^2-l^2}{2\,r_2 r_3},\quad \cos\mathfrak{b}' = \frac{r_1^2+r_3^2-m^2}{2\,r_1 r_3},\quad \cos\mathfrak{c}' = \frac{r_1^2+r_2^2-n^2}{2\,r_1 r_2}$$

wodurch sich ergiebt:

$$5\,r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = u^2+p^2+q^2$$

oder wenn $r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2 = [r_0^2]$ geschrieben wird:

$$[r_0^2] + 4\,r_0^2 = u^2+p^2+q^2 \qquad (298.)$$
$$[r_0^2] + 4\,r_1^2 = u^2+m^2+n^2$$
$$[r_0^2] + 4\,r_2^2 = l^2+p^2+n^2$$
$$[r_0^2] + 4\,r_3^2 = l^2+m^2+q^2$$

woraus folgt:

$$4\,(r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2) = l^2+m^2+n^2+u^2+p^2+q^2 \qquad (299.)$$

d. h.: Die Quadratsumme der sechs Kanten eines Te-

traeders ist gleich der vierfachen Quadratsumme der vom Schwerpuncte nach den Eckpuncten gezogenen Linien.

Zieht man 299 von der mit 4 multiplicirten Gleichung 298 ab, so ergiebt sich das Carnot'sche Resultat 296.

Zieht man die erste Gleichung 298 von der Summe der drei letzten ab, so erhält man die Gleichung

$$r_0^2 = 3\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (l^2 + m^2 + n^2) \qquad (300.)$$

deren rechte Seite eben so aus r_1, r_2, r_3, l, m, n zusammengesetzt ist, wie die rechte Seite von 296 aus u, p, q, l, m, n. Bezeichnen wir also einstweilen mit r'_0 den Abstand des Schwerpunctes des $\mathfrak{T}$ vom Schwerpuncte des t_0, so erkennen wir aus 300, dass $r_0^2 = 16\, r'^2_0$ oder $r_0 = 4\, r'_0$, was übrigens aus geometrischer Betrachtung eben so leicht erkannt wird. Wenn man nun weiter, wie so eben von $\mathfrak{T}$ zu t_0, so von t_0 zu dessen an $\triangle_0$ liegendem Theiltetraeder fortgeht und so fort, und dabei die jedesmalige Entfernung des Eckpunctes eines Tetraeders zum Schwerpunct (oder zum Eckpunct des nächsten Theiltetraeders) der Reihe nach mit $r_0, r_0', r_0'', r_0''' \ldots$ bezeichnet, so ist die Schwerlinie oder die Summe der unendlichen Reihe

$$r_0 + r_0' + r_0'' + r_0''' + \text{etc.} = r_0\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{4}{3}\, r_0$$

welches Verhalten zwischen der Schwerlinie und r_0 ebenfalls aus geometrischen Betrachtungen allgemein bekannt ist.

§. 156.

Auffallend aber ist, dass, so viel mir bekannt, noch Niemand den merkwürdigen Satz bemerkt hat, der in der Carnot'schen Gleichung

$$16\, r_0^2 = u^2 + p^2 + q^2 - 2\,pq\cos a_0 - 2\,uq\cos b_0 - up\cos c_0 \qquad (297.)$$

ausgesprochen ist, sobald man sich erinnert, dass die rechte Seite dieser Gleichung nichts Anderes ist, als der Werth des Quadrates der Diagonale, welche in dem durch u, p, q und deren Winkel a_0, b_0, c_0 bestimmten Parallelepipedon (Fig. 75) den Punct O mit seinem Gegenpuncte verbindet, (wie aus 117 hervorgeht), so dass

also der Schwerpunct des $\mathfrak{T}$ um ein Viertel dieser Diagonale vom Eckpunct O entfernt liegt. — Es fragt sich, ob r_0 auch der Lage nach mit diesem Viertel der Diagonale zusammen fällt? Um dies zu entscheiden, haben wir die Winkel zu untersuchen, welche r_0 mit u, p, q macht. Fällen wir vom Schwerpuncte die Normalen d_1, d_2, d_3 auf die Ebnen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, so ist für das dadurch gebildete Polar-Hexaeder nach 153:

$$2\,\Pi_0 u_0 = d_1 \sin\alpha + d_2 \sin\beta \cos c_0 + d_3 \sin\gamma \cos b_0$$

Nun ist für den Schwerpunct (vgl. §. 129) $d_1 = \frac{1}{4} h_1$, also $\Pi_1 d_1 = \frac{1}{4}\Pi_1 h_1 = \frac{1}{2} w$ (180), und da nach 187: $w \sin\alpha = \Pi_0 \Pi_1 u$ ist, so ist

$$d_1 \sin\alpha = \frac{w}{2\,\Pi_1} \cdot \frac{\Pi_0\,\Pi_1\,u}{w} = \tfrac{1}{2}\Pi_0 u \text{ und eben so}$$

$$d_2 \sin\beta = \tfrac{1}{2}\Pi_0 p, \qquad d_3 \sin\gamma = \tfrac{1}{2}\Pi_0 q,$$

also nach obiger Gleichung

$$4\,u_0 = u + p\cos c_0 + q\cos b_0$$

was nichts Anderes ist, als die Summe der Projectionen der drei Kanten u, p, q auf u, welche offenbar gleich ist der Projection der Diagonale d_0 auf die Seitenkante u.

Also sind die Projectionen von r_0 auf die Kanten u, p, q die Viertel der Projectionen jener Diagonale auf dieselben Kanten; also ist $\frac{4\,u_0}{d_0} = \frac{u_0}{r_0}$ der Cosinus ebensowohl des Winkels, den jene Diagonale, als desjenigen, den r_0 mit der Kante u macht, und da in derselben Weise auch

$$\frac{4\,p_0}{d_0} = \frac{p_0}{r_0}, \quad \frac{4\,q_0}{d_0} = \frac{q_0}{r_0} \text{ ist, so folgt:}$$

Der Schwerpunct eines Tetraeders ist der erste Viertelspunct in der von einer Ecke ausgehenden Diagonale des durch diese Ecke und ihre drei Kantenlängen bestimmten Parallelepipedons.

Daraus folgt noch, dass die Diagonalen der vier, durch die vier Tetraeder-Ecken bestimmten Parallelepipeda sich im Schwerpuncte schneiden.

Ferner ist, wie oben gezeigt:

$$4\,u_0 = u + p\cos c_0 + q\cos b_0 \qquad (301.)$$
$$4\,p_0 = u\cos c_0 + p + q\cos a_0$$
$$4\,q_0 = u\cos b_0 + p\cos a_0 + q$$

also nach 269:

$$uu_0 + pp_0 + qq_0 = \frac{d_0^2}{4} = 4\,r_0^2 \qquad (302.)$$

Eine andere merkwürdige Eigenschaft des Schwerpunctes des Tetraeders ist in §. 129 besprochen.

§. 157.

Carnot's Aufgabe X.

Den Winkel zweier Gegenkanten des Tetraeders durch die sechs Kanten auszudrücken d. h. (weil sie nicht in einer Ebne sind) den Winkel, welchen mit einer von ihnen die Linie macht, die aus einem beliebigen Puncte der ersteren parallel mit der andern gezogen ist.

Carnot giebt den folgenden Weg für die Auflösung an, auf dem sich aber die Rechnung viel einfacher durchführen lässt, als er sie andeutet.

Es sei am Tetraeder $OABC$ (Fig. 86) der Winkel (ul) zu finden. Man ziehe in der Ebne BOC durch O eine Parallele OD zu CB, so ist AOD der gesuchte Winkel (ul). Wird eine Kugelfläche um O gelegt, so beschreiben die Ebnen COD, AOC, AOB, AOD darauf die Bogen $\gamma\beta\delta = a_0 + c_2 = \pi - b_3$, $\alpha\gamma = b_0$, $\alpha\beta = c_0$, $\alpha\delta = (ul)$. Nun folgt aus dem Dreieck $\alpha\gamma\delta$:

$$\cos(ul) = -\cos b_0\cos b_3 + \sin b_0\sin b_3\cos\gamma$$

und aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$:

$$\cos\gamma = \frac{\cos c_0 - \cos a_0\cos b_0}{\sin a_0\sin b_0}$$

also ist

$$\cos(ul) = -\cos b_0\cos b_3 + \frac{\sin b_3}{\sin a_0}(\cos c_0 - \cos a_0\cos b_0)$$

Statt nun, wie Carnot weiter will, die Cosinus und die Sinus, die sich auf der rechten Seite befinden, einzeln durch die Kanten auszudrücken, also z. B. $\cos b_0 = \frac{u^2 + q^2 + m^2}{2\,uq}$ u. s. w., $\sin b_3$

$= \frac{2 \triangle_0}{q l}$ u. s. w. zu setzen, und darin wieder die $\triangle$ nach 266 zu ersetzen, wodurch die Rechnung übermässig weitläufig wird, setze man aus dem ebnen Dreieck BOC: $\frac{\sin b_3}{\sin a_0} = \frac{p}{l}$, wodurch wird:

$$l \cos (u l) = p \cos c_0 - \cos b_0 (l \cos b_3 + p \cos a_0)$$

oder, da $l \cos b_3 + p \cos a_0 = q$ ist,

$$l \cos (u l) = p \cos c_0 - q \cos b_0 \qquad (303.)$$

Dies Resultat lässt sich aber unmittelbar aus der geometrischen Anschauung entnehmen, denn es sagt, in Worte übersetzt, nichts Anderes aus, als:

Die Projection von l auf u ist gleich dem Unterschiede (resp. der Summe) der Projectionen der beiden Linien p und q auf u.

Dasselbe würden die Gleichungen sagen:

$$l \cos (u l) = m \cos c_1 - n \cos b_1$$
$$u \cos (u l) = m \cos c_3 - q \cos b_3$$
$$u \cos (u l) = p \cos c_2 - n \cos b_2$$

u. s. w.

Setzt man nun in 303

$$\cos c_0 = \frac{u^2 + p^2 - n^2}{2 u p}, \quad \cos b_0 = \frac{u^2 + q^2 - m^2}{2 u q}$$

so ergiebt sich der von Carnot gegebene Ausdruck:

$$2 u l \cos (u l) = p^2 + m^2 - q^2 - n^2 \qquad (304.)$$

Carnot bemerkt zu dem Resultate, dass es durch Zusammenstellung mit den beiden danach gebildeten:

$$2 p m \cos (p m) = q^2 + n^2 - u^2 - l^2$$
$$2 q n \cos (q n) = u^2 + l^2 - p^2 - m^2$$

zu der „merkwürdigen symmetrischen Formel“ führe

$$u l \cos (u l) + p m \cos (p m) + q n \cos (q n) = 0$$

welche aber nur bedingungsweise richtig ist, und falsch, wenn unter $(u l)$, $(p m)$, $(q n)$ von den je zwei Winkeln, die zwei Gegenkanten mit einander bilden, die spitzen verstanden werden. Denn bei dieser Voraussetzung ist, wenn z. B. $u^2 + l^2 > p^2 + m^2 > q^2 + n^2$,

$$2\,u\,l\,\cos\,(u\,l) = p^2 + m^2 - q^2 - n^2$$
$$2\,p\,m\cos(p\,m) = u^2 + l^2 - q^2 - n^2$$
$$2\,q\,n\,\cos(q\,n) = u^2 + l^2 - p^2 - m^2$$

also

$$2\,u\,l\cos(u\,l) + 2\,p\,m\cos(p\,m) + 2\,q\,n\cos(q\,n)$$
$$= 2\,(u^2 + l^2 - q^2 - n^2) = 4\,p\,m\cos(p\,m)$$

also

$$u\,l\cos(u\,l) - p\,m\cos(p\,m) + q\,n\cos(q\,n) = 0 \qquad (305.)$$

so dass also in diese algebraische Summe dasjenige Product subtractiv eintritt, für welches die Quadratsumme der darin verbundenen Gegenkanten kleiner als die eine und grösser als die andere der Quadratsummen je zweier Gegenkanten ist.

§. 158.

Die Gleichung selbst, woraus Carnot das Resultat 304 gefunden hat, kann einfacher, als aus der obigen Construction, aus Fig. 83 oder Fig. 84 abgelesen werden, welche sämmtliche Winkel je zweier Tetraederkanten auf einer Halbkugel in Verbindung darstellen, und zwar den Winkel $(u\,l)$ in den Bogen AC oder AD (vgl. §. 109). In der That erhalten wir, wenn $AE < \frac{1}{2}\pi < AD$ ist, aus dem Dreieck ACD die Gleichung

$$-\cos(u\,l) = \cos b_0 \cos b_3 - \sin b_0 \sin b_3 \cos\gamma$$

aus welcher im vorigen §. das Resultat abgeleitet worden ist, und können aus den Dreiecken AID, AFE, ABE noch andere ablesen, die zu demselben Ziele führen.

Die daraus hergeleitete Gleichung 303 führt aber durch eine leichte Umformung noch zu einem anderen merkwürdigen Ausdruck für $\cos(u\,l)$. Diese Gleichung wird nämlich, wenn sie durch den Modulus $\dfrac{l}{\sin a_0} = \dfrac{p}{\sin b_3} = \dfrac{q}{\sin c_2}$ des Dreiecks $\triangle_1$ dividirt wird:

$$\sin a_0 \cos(u\,l) = \sin b_3 \cos c_0 - \sin c_2 \cos b_0$$

Nun ist

$$\sin a_0 = \frac{2\,\Pi_0}{\sin\beta\sin\gamma},\quad \sin b_3 = \frac{2\,\Pi_3}{\sin\alpha'\sin\gamma},\quad \sin c_2 = \frac{2\,\Pi_2}{\sin\alpha'\sin\beta}$$

$$\cos c_0 = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \cos b_0 = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\Pi_0 \sin\alpha \sin\acute{\alpha} \cos(ul) = \Pi_3 (\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) - \Pi_2 (\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)$$

$$= \cos\gamma (\Pi_3 - \Pi_2 \cos\alpha) - \cos\beta (\Pi_2 - \Pi_3 \cos\alpha)$$

(nach 20. b)

$$= \cos\gamma (\Pi_0 \cos\gamma' + \Pi_1 \cos\beta) - \cos\beta (\Pi_0 \cos\beta' + \Pi_1 \cos\gamma)$$

$$= \Pi_0 (\cos\gamma\cos\gamma' - \cos\beta\cos\beta')$$

also

$$\cos(ul) = \frac{\cos\beta\cos\beta' - \cos\gamma\cos\gamma'}{\sin\alpha\sin\alpha'} \qquad (306.)$$

ein schöner Ausdruck für den Winkel zweier Gegenkanten durch die sechs Flächenwinkel.

§. 159.

Carnot's Aufgaben XI—XV.

Diese fünf Aufgaben löst das Mémoire nur in der Weise, dass die gesuchten Grössen durch Bestimmungsstücke ausgedrückt werden, welche in den vorhergehenden Aufgaben schon durch die sechs Kanten ausgedrückt worden sind. Sie könnten füglich gleich hinter die Aufg. VII gestellt sein, da sie sich wie diese naturgemäss an die voraufgehenden anschliessen, wogegen die Aufgaben X und XVI, wie wir sehen werden, zusammengehören. So werden gesucht in der

Aufgabe XI die Flächenwinkel, etwa α'.

Auflösung. Die Höhe des Dreiecks $\triangle_1$ ist $\frac{2\triangle_1}{l}$, also

$$h_0 = \frac{2\triangle_1}{l} \sin\alpha' \qquad (307.)$$

worin h_0 und $\triangle_1$ nach 263 (oder 267) und $\triangle_1$ nach 266 zu ersetzen sind.

Unmittelbar geht die Gleichung auch aus unserer 261 hervor, wonach man hat

$$\sin\alpha' = \frac{3\mathfrak{T}\cdot l}{2\triangle_0\triangle_1} \qquad (307.*)$$

Aufgabe XII. Die Neigungswinkel der Kanten gegen die Seitenebenen, etwa der Winkel $(u_1\triangle_0) = H_1$.

Auflösung: $u \sin H_1 = h_0 = \frac{3\mathfrak{T}}{\triangle_0}$

Aufgabe XIII. Der Winkel einer Tetraederhöhe mit einer Gipfelkante, etwa $(h_0 u)$.

Auflösung: $\cos(h_0 u) = \sin H_1 = \frac{3\mathfrak{T}}{u \triangle_0}$ (308.)

Aufgabe XIV. Der Neigungswinkel einer Tetraederhöhe gegen eine Fläche der Gipfelecke, etwa $(h_0 \triangle_1)$.

Auflösung: $\cos(h_0 \triangle_1) = \sin \alpha' = \frac{3\mathfrak{T} \cdot l}{2 \triangle_0 \triangle_1}$

Aufgabe XV. Der Winkel den die von dem Fusspuncte H_0 einer Höhe (h_0) nach zwei Eckpuncten (B, C) der Basis gezogenen Geraden mit einander bilden.

Auflösung. Es ist

$$\cos B H_0 C = \frac{\overline{BH_0}^2 + \overline{H_0 C}^2 - \overline{BC}^2}{2\,\overline{BH_0} \cdot \overline{H_0 C}}$$

Nun ist $\overline{BC} = l$, $\overline{BH_0}^2 = p^2 - h_0^2$, $\overline{HC_0}^2 = q^2 - h_0^2$ also

$$\cos B H_0 C = \frac{p^2 + q^2 - l^2 - 2h_0^2}{2\sqrt{p^2 - h_0^2}\,\sqrt{q^2 - h_0^2}} \quad (309.)$$

$$= \frac{(p^2 + q^2 - l^2) \cdot 16 \triangle_0^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9\mathfrak{T}^2}{2\sqrt{16 \triangle_0^2 p^2 - 16 \cdot 9\mathfrak{T}^2}\,\sqrt{16 \triangle_0^2 q^2 - 16 \cdot 9\mathfrak{T}^2}}$$

worin $16 \triangle_0^2$ und $16 \cdot 9\mathfrak{T}^2$ nach 266. 267 zu ersetzen sind.

Daraus folgt ferner

$$\sin B H_0 C = \frac{\sqrt{16 \triangle_1^2 - 4 l^2 h_0^2}}{2\sqrt{p^2 - h_0^2}\,\sqrt{q^2 - h_0^2}} \quad (310.)$$

woraus hervorgeht:

$$\triangle(B H_0 C) = \triangle_1 \cos \alpha' = \tfrac{1}{2} \overline{BH_0} \cdot \overline{H_0 C} \sin B H_0 C$$

$$= \sqrt{\triangle_1^2 - \tfrac{1}{4} l^2 h_0^2} \quad (311.)$$

Die Entwickelung der Formeln 307 – 311 giebt keine Ausdrücke, in denen sich ein neues Gesetz ausspräche.

§. 160.

Carnot's Aufgabe XVI.

Die kürzeste Entfernung zweier Gegenkanten des Tetraeders durch die sechs Kanten auszudrücken.

Carnot's Auflösung. Fig. 87.

Zieht man $OD \parallel CB$, so ist die Ebne AOD auch parallel der CB, und wenn man von irgend einem Puncte der CB auf diese Ebne eine Normale fällt, so ist diese auch auf OA normal und stellt den Abstand der Linie CB von der Ebne AOD dar, ist also gleich dem kürzesten Abstande der Kanten l, u. — Um nun diese Normale zu finden, fälle man $CD \perp OD$ und lege die Ebne CDA. Dann ist $OACD$ ein Tetraeder, dessen von C aus gefällte Höhe gleich der gesuchten Linie ist. Es kommt also darauf an, diese Höhe nach §. 142 oder §. 143 durch die Kanten des Tetraeders $OADC$, und dann diese wieder durch die Kanten des Tetraeders $\mathfrak{T}$ oder $OABC$ auszudrücken. — Von diesen Kanten gehören u, m, q beiden Tetraedern an. Ferner ist $CD = q \sin(a_0 + c_2) = q \sin b_3$, $OD = -q \cos b_3$, und $\overline{AD}^2 = u^2 + \overline{OD}^2 - 2u \cdot \overline{OD} \cos AOD$, also, da $AOD = (ul)$, $\overline{AD}^2 = u^2 + q^2 \cos^2 b_3 + 2uq \cos b_3 \cos(ul)$; die in den Ausdrücken für CD, OD, AD vorkommenden Grössen lassen sich nach den vorausgehenden Aufgaben sämmtlich durch die Tetraederkanten ausdrücken, also kann man auch die von C auf AOD gefällte Höhe, also den Abstand der Kanten u, l durch l, m, n, u, p, q ausdrücken.

Dies ist der von Carnot angegebene Weg, den aber bis ans Ziel zu verfolgen er wahrscheinlich selbst allzu weitläufig und langweilig gefunden hat, wiewohl die Arbeit an Mühe und Langweiligkeit weit hinter der in §. 142, und noch weiter hinter der in §. 145 angedeuteten Rechnung zurückbleibt. Genug, Carnot hat für diese Aufgabe das Resultat nicht mitgetheilt.

§. 161.

Weit einfacher ist die Auflösung auf dem folgenden Wege zu finden. Fig. 82.

Legt man durch A eine Parallelebne zu $\triangle_1$, und durch BC eine Parallelebne zu OA, so erhalten wir das dreiseitige Prisma $OBCAB'C'$, dessen Seitenparallelogramm $BCB'C' = ul \sin(ul)$ ist. Da der Inhalt des Prismas $3\mathfrak{T}$ ist, so ist der Inhalt der vierseitigen Pyramide $ABCB'C'$ gleich $2\mathfrak{T}$. Da nun OA der Ebne $BOB'C'$ parallel ist, so ist jeder von einem Puncte der

OA auf $BCB'C'$ gefällte Normale gleich dem gesuchten Abstande der Geraden OA und BC, also wird dieser Abstand f_1 auch durch die Höhe der vierseitigen Pyramide $ABCB'C'$ dargestellt. Nun ist diese Pyramide gleich $2\,\mathfrak{T}$, also

$$f_1 = \frac{3\text{ Pyr.}}{\text{Basis}} = \frac{3 \cdot 2\,\mathfrak{T}}{ul \sin(ul)} \qquad (312.)$$

Nach 304 ist nun aber

$$\cos(ul) = \frac{m^2 + p^2 - n^2 - q^2}{2\,ul}, \text{ also}$$

$$\sin(ul) = \frac{\sqrt{4\,u^2l^2 - (m^2 + p^2 - n^2 - q^2)^2}}{2\,ul}, \text{ also:} \qquad (313.)$$

$$f_1 = \frac{4 \cdot 3\,\mathfrak{T}}{\sqrt{4\,u^2l^2 - (m^2 + p^2 - n^2 - q^2)^2}} \qquad (314.)$$

worin $\mathfrak{T}$ nach 267 durch die Kanten auszudrücken ist.

Dem Zähler in 313 und Nenner in 314 kann man die Form geben:

$$\sqrt{(u+l)^2 - u^2 - l^2 + p^2 + m^2 - q^2 - n^2}$$
$$\times \sqrt{(u+l)^2 - u^2 - l^2 - m^2 - p^2 + q^2 + n^2}$$

§. 162.

Die Gleichung:

$$f_1 = \frac{2 \cdot 3\,\mathfrak{T}}{ul \sin(ul)} \qquad (312.)$$

giebt durch die vielen verschiedenen Ausdrücke, die wir für $3\,\mathfrak{T}$ gefunden haben, (s. §. 131) Gelegenheit zu vielen Umwandlungen. Die Zahl derselben wird aber noch verdoppelt durch die neue Form, welche man erhält, wenn man den Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks durch $\mathfrak{M}$ dividirt, wodurch vermöge 180 und 191 hervorgeht:

$$f_1 = \frac{4\,w}{\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul)} \qquad (315.)$$

in welchen Ausdruck man alle die für $2\,w$ gefundenen Ausdrücke einsetzen kann.

Für die Grössen $ul \sin(ul)$ und $\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul)$ sind aber noch folgende wichtige Ausdrücke an der Fig. 82 abzuleiten:

Legt man durch das dreiseitige Prisma $OBCAB'C'$ (Fig. 82.)

einen Querdurchschnitt normal auf OA (u), so zeichnet dieser ein geradliniges Dreieck. Werden die Durchschnitte dieser Ebne mit den Seitenflächen des Prismas BB', OB', OC', nämlich $l \sin(ul)$, $q \sin b_0$, $p \sin c_0$, einstweilen mit a, b, c bezeichnet, so ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha, \quad \text{also auch}$$
$$u^2 a^2 = u^2 b^2 + u^2 c^2 - 2\,ub \cdot uc \cdot \cos\alpha$$

Nun ist offenbar $ua = ul \sin(ul)$, $ub = 2\triangle_2$, $uc = 2\triangle_3$, also

$$u^2 l^2 \sin^2(ul) = 4(\triangle_2^2 + \triangle_3^2 - 2\,\triangle_2\,\triangle_3 \cos\alpha) \qquad (316.)$$

nach 31. b.
$$= 4(\triangle_0^2 + \triangle_1^2 - 2\,\triangle_0\,\triangle_1 \cos\alpha')$$
$$p^2 m^2 \sin^2(pm) = 4(\triangle_1^2 + \triangle_3^2 - 2\,\triangle_1\,\triangle_3 \cos\beta)$$
$$= 4(\triangle_0^2 + \triangle_2^2 - 2\,\triangle_0\,\triangle_2 \cos\beta')$$
$$q^2 n^2 \sin^2(qn) = 4(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 - 2\,\triangle_1\,\triangle_2 \operatorname{cns}\gamma)$$
$$= 4(\triangle_0^2 + \triangle_3^2 - 2\,\triangle_0\,\triangle_3 \cos\gamma')$$

woraus dann weiter durch Division mit $\mathfrak{M}^2$ folgt:

$$\sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4(\Pi_2^2 + \Pi_3^2 - 2\,\Pi_2\,\Pi_3 \cos\alpha) \qquad (317.)$$
$$= 4(\Pi_0^2 + \Pi_1^2 - 2\,\Pi_0\,\Pi_1 \cos\alpha')$$
$$\sin^2\beta \sin^2\beta' \sin^2(pm) = 4(\Pi_1^2 + \Pi_3^2 - 2\,\Pi_1\,\Pi_3 \cos\beta)$$
$$= 4(\Pi_0^2 + \Pi_2^2 - 2\,\Pi_0\,\Pi_2 \cos\beta')$$
$$\sin^2\gamma \sin^2\gamma' \sin^2(qn) = 4(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2\,\Pi_1\,\Pi_2 \cos\gamma)$$
$$= 4(\Pi_0^2 + \Pi_3^2 - 2\,\Pi_0\,\Pi_3 \cos\gamma')$$

Der auf zweierlei Weise ausgedrückte Inhalt dieses Dreiecks ergiebt ferner die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}bc \sin\alpha = \tfrac{1}{2}pq \sin b_0 \sin c_0 \sin\alpha =$$
$$pqP_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\,\tfrac{1}{2}(a-b+c)\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$

also, wenn $ua = ul \sin(ul)$ mit $\square_1$ bezeichnet wird: $u^2 pq P_0$ oder

$$u \cdot 3\mathfrak{T} = \sqrt{\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}\square_1 + \triangle_2 + \triangle_3)(-\tfrac{1}{2}\square_1 + \triangle_2 + \triangle_3) \\ (\tfrac{1}{2}\square_1 - \triangle_2 + \triangle_3)(\tfrac{1}{2}\square_1 + \triangle_2 - \triangle_3)\end{matrix}} \qquad (318.)$$

und wenn diese Gleichung durch $\mathfrak{M}^2$ dividirt wird

$$\frac{u \cdot 2w}{\mathfrak{M}} = \sqrt{\begin{matrix}(\ \tfrac{1}{2}\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul) + \Pi_2 + \Pi_3) \\ (-\tfrac{1}{2}\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul) + \Pi_2 + \Pi_3) \\ (\ \tfrac{1}{2}\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul) - \Pi_2 + \Pi_3) \\ (\ \tfrac{1}{2}\sin\alpha \sin\alpha' \sin(ul) + \Pi_2 - \Pi_3)\end{matrix}} \qquad (319.)$$

§. 163.

Nicht unpassend ist hier die von Carnot nicht aufgenommene Aufgabe einzuschalten:

Den Punct zu bestimmen, in dem eine Kante (l oder u) von der ihr und ihrer Gegenkante gemeinsamen Normale (f_1) getroffen wird.

Auflösung. Fig. 82. Da die Kante OA (u) parallel mit der Ebne $BCB'C'$ ist, so muss die gemeinsame Normale für u und l in der durch OA auf $BCB'C'$ normal gefällten Ebne liegen, und also BC in dem Puncte treffen, in dem BC von dieser Ebne geschnitten wird.

Diesen Punct können wir auch dadurch finden, dass wir von A auf die Ebne $BCB'C'$ eine Normale fällen, und von deren Fusspuncte eine Parallele zu $B'C$ ziehen.

Ist in Fig. 88 auf der Kante OA der Ecke O die Strecke $OA = u$ beliebig genommen, von A eine Normale auf die Ebne BOC gefällt, und vom Fusspuncte H in der Ebne BOC die HP, HQ parallel zu OC, OB gezogen; ist ferner die Ebne ADH durch AH normal auf OC gelegt, so dass $\angle ADH$ den Flächenwinkel γ der Ecke O repräsentirt, so ist

$$OP = QH = HD \operatorname{cosec} a = \frac{u \sin b \cos \gamma}{\sin \alpha} \qquad (320.)$$

$$OQ = PH = \frac{u \sin c \cos \beta}{\sin a}$$

Nun ist in Fig. 82 an der Ecke $CABB'$ die Kante $CA = m$, $\angle ACB' = c_1$, $\angle B'CB = (ul)$, also die gesuchte Strecke auf CB von C aus

$$l_3 = \frac{m \sin c_1 \cos (CB')}{\sin (ul)} \qquad (321.)$$

wo (CB') den Winkel der Ebnen $B'COA$ und $BCB'C'$ bedeutet. Nun ist aber aus der Ecke bei C

$$\cos (CB') = \frac{\cos c_3 - \cos c_1 \cos (ul)}{\sin c_1 \sin (ul)}, \text{ also}$$

$$l_3 = \frac{m (\cos c_3 - \cos c_1 \cos (ul))}{\sin^2 (ul)}$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Grössen kann man nun alle durch die Kanten des Tetraeders ausdrücken, nämlich:

$$\cos c_3 = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{2\,lm}, \quad \cos c_1 = \frac{u^2 + m^2 - q^2}{2\,um}$$

und $\cos(ul)$ und $\sin(ul)$ nach 304 und 318. Der dadurch zu gewinnende Ausdruck hat aber keine elegante oder ein Gesetz markirende Form. Etwas hübscher wird der Ausdruck, wenn wir die Entfernung des gesuchten Punctes nicht von C, sondern vom Halbirungspuncte der Kante l aus nehmen, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}l - l_3 = \frac{l\sin^2(ul) - 2m\cos c_3 + 2m\cos c_1\cos(ul)}{2\sin^2(ul)}$$

Setzt man hierin die obigen Ausdrücke ein, so erhält man:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}l} = \frac{2u^2(p^2 - m^2 - q^2 + n^2) - (p^2 + m^2 - q^2 - n^2)(p^2 - m^2 + q^2 - n^2)}{4\,u^2l^2 - (p^2 + m^2 - q^2 - n^2)^2} \qquad (322.)$$

§. 164.

Interessanter sind Ausdrücke dieser Grösse durch andere Bestimmungsstücke, als die Kanten.

Gehen wir nochmals von der Gleichung 321 aus, so kann darin $\cos B'C$ auch so ausgedrückt werden:

Nach Theil I. 53. b (zweite Gleichung) ist in Fig. 82 (weil $ABCB'C'$ eine vierseitige Pyramide, deren Basis ein Parallelogramm ist)

$$\Pi_2 \cos(B'C) = \Pi(C')\cos\beta' + \Pi(B)\cos\gamma$$

(worin $\Pi(C')$ und $\Pi(B)$ die Π-sinus der Ecken an der Basis der vierseitigen Pyramide bedeuten) und da der Modulus der Ecke $C' = \frac{\sin(ul)}{\sin\beta}$, der Modulus der Ecke $(B) = \frac{\sin(ul)}{\sin\gamma'}$, also

$\Pi(C') = \frac{P(C')\sin\beta}{\sin(ul)}$ und $\Pi(B) = \frac{P(B)\sin\gamma'}{\sin(ul)}$ ist:

$$\Pi_2 \cos(B'C) = \frac{P(C')\sin\beta\cos\beta' + P(B)\sin\gamma'\cos\gamma}{\sin(ul)}, \text{ d. h.}$$

$$\cos(B'C) = \frac{\sin c_0 \sin c_2 \sin^2\beta\cos\beta' + \sin b_1 \sin b_2 \sin^2\gamma'\cos\gamma}{2\,\Pi_2 \sin(ul)}$$

also nach 321, wenn wir im zweiten Gliede des Zählers $m\sin c_1$ durch $q\sin b_0$ ersetzen:

$$l_3 = \frac{m \sin c_0 \sin c_1 \sin c_2 \sin^2\beta \cos\beta' + q \sin b_0 \sin b_1 \sin b_2 \sin^2\gamma' \cos\gamma}{2\,\Pi_2 \sin^2(ul)}$$

Setzt man hierin

$$\sin c_0 = \frac{2\,\Pi_0}{\sin\alpha \sin\beta} \qquad \sin b_0 = \frac{2\,\Pi_0}{\sin\alpha \sin\gamma}$$

$$\sin c_1 = \frac{2\,\Pi_1}{\sin\alpha \sin\beta'} \qquad \sin b_1 = \frac{2\,\Pi_1}{\sin\alpha \sin\gamma'}$$

$$\sin c_2 = \frac{2\,\Pi_2}{\sin\alpha' \sin\beta} \qquad \sin b_2 = \frac{2\,\Pi_2}{\sin\alpha' \sin\gamma'}$$

so erhält man

$$l_3 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4\,\Pi_0\Pi_1 \sin\alpha' (m \operatorname{ctg}\beta' + q \operatorname{ctg}\gamma)$$

$$\left(\text{und, weil nach 260 ist: } \frac{m}{\sin\beta'} = \frac{w}{\Pi_1\Pi_3},\ \frac{q}{\sin\gamma} = \frac{w}{\Pi_0\Pi_3}\right)$$

$$= \frac{4w}{\Pi_3} (\Pi_0 \cos\beta' + \Pi_1 \cos\gamma) \sin\alpha'$$

(nach 20. b)

$$= \frac{4w}{\Pi_3} \sin\alpha' (\Pi_2 - \Pi_3 \cos\alpha)$$

Danach ist also

$$\Pi_0 u_0 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4w \sin\alpha (\Pi_1 - \Pi_0 \cos\alpha') \quad (323.)$$

$$\Pi_1 u_1 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4w \sin\alpha (\Pi_0 - \Pi_1 \cos\alpha')$$

$$\Pi_2 l_2 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4w \sin\alpha' (\Pi_3 - \Pi_2 \cos\alpha)$$

$$\Pi_3 l_3 \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin^2(ul) = 4w \sin\alpha' (\Pi_2 - \Pi_3 \cos\alpha)$$

nebst dreimal zwei anderen.

Addirt man je zwei dieser Gleichungen, z. B. die ersten, nachdem man sie mit Π_1 resp. Π_0 multiplicirt hat, und setzt $u_0 + u_1 = u$, so erhält uan vermöge 260 wieder die Gleichungen 317.

§. 165.

Auch die folgende Aufgabe, die Carnot nicht hat, ist hier einzuschalten:

Die Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten des Tetraeders durch die sechs Kanten auszudrücken.

Auflösung. In §. 110 ist an Fig. 85 gezeigt, dass die Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten: $UL = g_1$, $PM = g_2$, $QN = g_3$ die Diagonalen eines Octaeders

$UPQLMN$ sind (welches zurückbleibt, wenn das Tetraeder durch die Halbirungspuncte der Kanten enteckt wird) und zugleich die Diagonalen von dessen Diagonal - Parallelogrammen $PQMN$, $UQLN$, $UPLM$, welche letzteren von den Hälften je zweier unter ihrem Winkel zusammengesetzten Gegenkanten gebildet, und durch $\frac{1}{4}ul\sin(ul)$, $\frac{1}{4}pn\sin(pn)$, $\frac{1}{4}qn\sin(qn)$ ausgedrückt werden.

Da nun die Zeichen (ul), (pm), (qn) je zwei Nebenwinkel bedeuten können, so sollen sie hier die spitzen Winkel bedeuten, wobei wir uns in der Figur 83 diese denken:
$(ul) = PQM = PNM$, $(pm) = UQL = UNL$, $(qn) = PUM = PLM$. Dann ist

$$g_1^2 = \tfrac{1}{4}(p^2+m^2-2pm\cos(pm)) = \tfrac{1}{4}(q^2+n^2+2qn\cos(qn))$$
$$g_2^2 = \tfrac{1}{4}(u^2+l^2-2ul\cos(ul)) = \tfrac{1}{4}(q^2+n^2-2qn\cos(qn))$$
$$g_3^2 = \tfrac{1}{4}(u^2+l^2+2ul\cos(ul)) = \tfrac{1}{4}(p^2+m^2+2pm\cos(pm))$$

woraus durch Addition je zweier folgt: (324.)

$$g_2^2+g_3^2 = \tfrac{1}{2}(u^2+l^2) \quad (325.)$$
$$g_1^2+g_3^2 = \tfrac{1}{2}(p^2+m^2)$$
$$g_1^2+g_2^2 = \tfrac{1}{2}(q^2+n^2)$$

und daraus:

$$4g_1^2 = -u^2-l^2+p^2+m^2+q^2+n^2 \quad (3B6.)$$
$$4g_2^2 = u^2+l^2-p^2-m^2+q^2+n^2$$
$$4g_3^2 = u^2+l^2+p^2+m^2-q^2-n^2$$

ferner:

$$4(g_1^2+g_2^2+g_3^2) = u^2+l^2+p^2+m^2+q^2+n^2 \quad (327.)$$

d. h.: die Quadratsumme der sechs Tetraederkanten ist gleich der vierfachen Quadratsumme der drei Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten.

Also (nach 299) ist auch die Quadratsumme der Verbindungslinien der Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten (die Quadratsumme der drei Schwerdurchmesser) gleich der Quadratsumme der vier vom Schwerpuncte nach den Eckpuncten gezogenen Linien.

Dass die ersteren drei Linien sich im Schwerpuncte des Tetraeders schneiden ist schon in §. 110 bemerkt.

§. 166.

Fernere bemerkenswerthe Sätze, die sich leicht aus der Betrachtung der Diagonal-Parallelogramme des Octaeders $UPQLMN$ in Fig. 85 ergeben sind:

$$g_2 g_3 \sin(g_2 g_3) = \tfrac{1}{2} u l \sin(u l) \qquad (328.)$$
$$g_1 g_3 \sin(g_1 g_3) = \tfrac{1}{2} p m \sin(p m)$$
$$g_1 g_2 \sin(g_1 g_2) = \tfrac{1}{2} q n \sin(q n)$$

und

$$g_2^2 + g_3^2 \pm 2 g_2 g_3 \cos(g_2 g_3) = \begin{cases} u^2 \\ l^2 \end{cases} \qquad (329.)$$
$$g_2^2 + g_3^2 \pm 2 g_1 g_3 \cos(g_1 g_3) = \begin{cases} p^2 \\ m^2 \end{cases}$$
$$g_1^2 + g_2^2 \pm 2 g_1 g_2 \cos(g_1 g_2) = \begin{cases} q^2 \\ n^2 \end{cases}$$

Auch folgt noch aus 296 und 283 nebst 285:

$$4 u^2 l^2 \sin^2(u l) = \left((u+l)^2 - 4 g_2^2\right)\left((u+l)^2 - 4 g_3^2\right) \qquad (330.)$$
$$4 p^2 m^2 \sin^2(p m) = \left((p+m)^2 - 4 g_1^2\right)\left((p+m)^2 - 4 g_3^2\right)$$
$$4 q^2 n^2 \sin^2(q n) = \left((q+n)^2 - 4 g_1^2\right)\left((q+n)^2 - 4 g_2^2\right)$$

wonach also der Sinus des Winkels zweier Gegenkanten ausgedrückt ist durch diese Gegenkanten selbst, und die beiden zu den andern Kanten gehörigen Schwerdurchmesser.

§. 167.

Carnot's Aufgabe XVII.

In Werthen der sechs Kanten des Tetraeders den Winkel auszudrücken, welchen zwei Halbmesser der umschriebenen Kugel bilden, die man zu den Endpuncten einer Kante zieht.

Auflösung. Für den Winkel α', den die beiden nach O und nach A gezogenen Radien der umschriebenen Kugel bilden, hat man aus dem ebenen Dreieck OKA:

$$\cos\alpha' = \frac{2r^2 - u^2}{2r^2} \text{ also}$$

$$2(1 - \cos\alpha')\, r^2 = u^2, \text{ oder } 2 r \sin\tfrac{1}{2}\alpha' = u \qquad (331.)$$

worin r nach 269 oder 284 durch die Kanten zu ersetzen ist.

§. 168.

Carnot's Aufgabe XVIII.

Wenn von allen Quantitäten, die bei der Construction einer dreiseitigen Pyramide vorkommen, sechs gegeben sind, durch welche die übrigen bestimmt werden, diese übrigen zu finden.

Die Carnot'sche Auflösung besteht in dem Nachweise der logischen Möglichkeit der Auflösung, d. h. einer vermittels der Trigonometrie und Algebra auszuführenden Tetraedrometrie. — In einer späteren (zwischen den Aufgaben XXV und XXVI eingefügten) „Bemerkung" setzt er hinzu: — „Doch kann ich die Pyramide nicht verlassen, ohne den Wunsch zu äussern, man möge durch sie für die Geometrie dreier Dimensionen eben das thun, was man für die ebne Geometrie durch die Auflösung des Dreiecks in allen möglichen Fällen gethan hat. Wir haben freilich oben (in der Aufg. XVIII) die Auflösung des allgemeinen Problems gegeben, aber eigentlich doch nicht mehr gethan, als es in Gleichung gesetzt" — (sollte vielmehr heissen: „angedeutet, wie es in Gleichung gesetzt werden kann") — „so wie man die allgemeine Aufgabe der Trigonometrie in Gleichung setzt, wenn man alle Theile des Dreiecks in Werthen dreier von einander unabhängigen ausdrückt. Man soll aber diese Urgleichungen für jede besondere Aufgabe entwickeln, und ihnen eine für den numerischen Calcul geschmeidige Form geben. So würde es eine ungeheure Arbeit sein, wenn man von den Urgleichungen unmittelbar auf die algebraische oder numerische Auflösung der Pyramide in allen besonderen Fällen kommen wollte, wenn gleich diese Arbeit sehr nützlich sein würde."

Man muss doch sagen, dass Carnot auch mit der angegebenen Beschränkung seinen Andeutungen noch zu Grosses zutraut. Denn nicht nur das würde eine ungeheure Arbeit sein, nach seinen Formeln numerische Rechnungen aller Art auszuführen, sondern auch schon das: nach seinen Anfängen alle möglichen tetraedrischen Aufgaben „in Gleichung zu setzen" d. h. je sieben (resp. sechs) Bestimmungsstücke des Tetraeders in einer Gleichung mit einander zu verbinden.

Es ist kaum zu verwundern, dass noch Niemand, so viel ich weiss, auf dem hier angedeuteten Wege weiter vorzudringen unternommen hat, ja ich möchte behaupten, man könne es dem „Mémoire“ anmerken, dass Carnot selbst aus einem gewissen Gefühl der Nichtbefriedigung die weitere Verfolgung der angefangenen Aufgabe aufgegeben hat. Auf solches — ich möchte sagen: verdriessliche — Abbrechen der Arbeit deuten die fehlerhaften Auflösungen der Aufgaben VI, XXII, XXIII, die falsche der Aufg. XXV, die nicht ausgeführte der Aufg. XVI, so wie der lockere, höchst flüchtig entwickelte Gedankengang, durch den er in der gegenwärtigen Aufg. XVIII seine Einzelresultate mit seiner Idee einer Tetraedrometrie in Beziehung setzt, worin man den genialen und strengen Verfasser der *Géometrie de position* kaum wieder erkennt. Wenn ich also die Carnot'schen Auflösungen gleichsam als Folien für die meinigen benutze, so will ich mich bei dieser Gelegenheit ausdrücklich dagegen verwahren, zu denjenigen gerechnet zu werden, die sich zu heben glauben, indem sie einer anerkannten Autorität hier und da triumphirend einen *lapsus calami* nachweisen. Vielmehr halte ich das Mémoire für einen, auch in des Autor's Augen unvollendeten Versuch, ein Nebenwerk, worin er, selbst unbefriedigt, die mühsam gefundenen Einzelresultate zu einem nur oberflächlich abgerundeten Ganzen zusammenstellte, um sie nebst seiner Hauptidee einem Nachfolger zur Anregung weiterer Bearbeitung zu überlassen, und ich glaube sie ganz in seinem Sinne zu benutzen, wenn ich daran das neue Element der Eckenfunctionen prüfe, und dadurch zeige, dass jener Versuch einer Tetraedrometrie auch in der Hand eines Carnot ein unvollendetes Nebenwerk bleiben musste, weil ihm dieses Element nicht zu Gebote stand, durch welches seine Idee erst lebensfähig geworden ist.

§. 169.

Dem, wie gesagt, ziemlich flüchtig dargestellten Gedankengange Carnot's über die mögliche Ausführung der umfassenden Aufgabe XVIII möchte etwa in folgenden bestimmten Schritten nachzukommen sein:

1) So wie im Vorausgehenden eine Anzahl von Bestimmungs-

stücken des Tetraeders durch die sechs Kanten ausgedrückt sind, so können alle möglichen dadurch ausgedrückt werden.

2) Soll nun irgend eine bestimmbare Tetraeder-Grösse durch sechs andere gegebene Bestimmungsstücke ausgedrückt werden, so kann man sowohl die gesuchte Grösse, als auch die sechs gegebenen durch die Kanten ausdrücken.

3) Also kann man auch jede Kante durch die gegebenen Grössen ausdrücken, da man für die gegebenen Grössen und die sechs Kanten sechs Gleichungen hat.

4) Setzt man endlich die dadurch gefundenen Werthe der Kanten in die Gleichung, welche die gesuchte Grösse durch die Kanten ausdrückt, oder eliminirt man aus den sieben unter 2) genannten Gleichungen die sechs Kanten: so hat man eine Gleichung zwischen den gegebenen und der gesuchten Grösse.

5) So wie diesem Verfahren die Thatsache zu Grunde liegt, dass jede Tetraeder-Grösse durch die sechs Kanten ausgedrückt werden kann, so könnte man auch irgend sechs andere Bestimmungsstücke, durch welche ein Tetraeder vollständig bestimmt wird, zu Elementen der Fundamental-Gleichungen wählen.

6) Ist aber eine Tetraedergrösse zu suchen, welche nur von der Form, nicht von der Grösse des Tetraeders abhangt, nämlich ein Verhältniss, oder ein Winkel (dessen Grösse bekanntlich nicht unmittelbar, sondern vermittels einer trigonometrischen Function, also auch eines Verhältnisses gesucht wird), so reichen fünf Bestimmungsstücke, welche Verhältnisse, resp. Winkel sind, zur Berechnung aus.

7) Solche fünf Bestimmungsstücke sind zum Beispiel fünf von den Flächenwinkeln des Tetraeders oder fünf von den Winkeln der nach den Ecken gezogenen Radien der umschriebenen Kugel.

8) Sollen diese letzteren in der Weise, wie oben die Kanten, einem allgemeinen Systeme zu Grunde gelegt werden, so muss man vor Allem die Gleichung kennen, welche fünf dieser Winkel mit dem sechsten verbindet, und

9) dies führt den Autor von der an die Spitze gestellten allgemeinsten Aufgabe auf die ganz specielle zurück:

Die Gleichung zu finden, die zwischen den sechs Winkeln besteht, welche von den vier nach den Eck-

puncten gezogenen Radien der umschriebenen Kugel gebildet werden.

Es bedarf keiner ausführlichen Erörterung, dass dieser Nachweis der logischen Möglichkeit, alle tetraedrischen Aufgaben zu lösen, die factische Ausführung eines Systems der Tetraedrometrie noch wenig fördert. Die Eliminirung von sechs Grössen aus sieben gemischt-quadratischen Gleichungen lässt sich wahrlich nicht so leicht ausführen, als vorschreiben, und es ist erlaubt zu bezweifeln, dass die Wissenschaft auf diesem algebraisch-trigonometrischen Wege jemals zu einer Tetraedrometrie gelangen werde. Ja sogar das ist zu bezweifeln, dass ein solches System die ungeheure Arbeit seiner Schöpfung durch bedeutende Aufklärungen über die Geometrie dreier Dimensionen belohnen würde. Jeder, der dieses Buch und besonders dieses Capitel bis hierher mit Aufmerksamkeit gelesen hat, wird wohl darin einverstanden sein, dass erst durch die Einführung der Ecken als Rechnungsgrössen ein fruchtbarer Boden für eine Tetraedrometrie gewonnen sei, die in der Eleganz der Methode und in der Durchsichtigkeit der Resultate der ebnen und sphärischen Trigonometrie ebenbürtig zur Seite stehe.

§. 170.

Der im vorigen §. sub 9 genannten Aufgabe folgen im „Mémoire“ diese:

Aufgabe XIX:

Wenn von sechs Bogen grösster Kreise, die vier Puncte auf der Oberfläche einer Kugel vereinigen, fünf gegeben sind, den sechsten zu finden.

Aufgabe XX:

Wenn von den sechs Winkeln, welche von je zwei der vier Kanten am Scheitel einer vierseitigen Pyramide gebildet werden, fünf gegeben sind, den sechsten zu finden.

Aufgabe XXI:

Wenn von den sechs Winkeln, welche von vier durch einen Punct im Raume gezogenen Geraden gebildet werden, fünf gegeben sind, den sechsten zu finden.

Die Auflösung dieser vier Aufgaben XVIII—XXI führt Carnot viermal auf unsere Gleichung 34. a (Cap. 4), wobei er wohl die Uebereinstimmung der Endgleichungen, nicht aber die der Aufgaben selbst zu bemerken scheint. — Offenbar aber ist die Aufgabe XXI der allgemeine Ausdruck der drei vorhergehenden. Denn ob die von einem Puncte ausgehenden Strahlen unbegrenzt, oder gleich begrenzt, oder irgend wie begrenzt sind, hat ja auf ihre Winkel keinen Einfluss. Und wenn man um den Strahlpunct eine Kugel legt, auf deren Oberfläche die den Winkeln entsprechenden Bogen erscheinen, so muss natürlich zwischen den Cosinus der Bogen dieselbe Gleichung stattfinden, wie zwischen den Cosinus der Winkel. Und wenn die vier Strahlen statt vier Ecken um einen Punct eine vierkantige Ecke bilden, so sind vier auf ihnen gleich abgegrenzte Strecken ebenfalls Radien der demjenigen Tetraeder umschriebenen Kugel, welches die vier durch je drei Endpuncte der gleichgemachten Strahlen gelegten Ebenen einschliessen (in welchem Falle der Mittelpunct der umschriebenen Kugel in einem Aussenkeile des Tetraeders liegt). Die verschiedenen Lagen der Strahlen haben, wie schon in §. 37 bemerkt ist, auf die Gleichung 34. a durchaus keinen Einfluss, sondern kommen erst in deren verschiedenen Auflösungen 32. a zum Ausdruck (vergl. §. 28). Am bestimmtesten aber kommen diese verschiedenen Lagen überhaupt nicht in den Winkelgleichungen, sondern in den Ecken- und Seitengleichungen für vier Strahlen nach dem im §. 22 ausgesprochenen Gesetz A. a zum Ausdruck, mit denen sich das dritte Capitel der „Tetraedrometrie“ beschäftigt, nachdem im zweiten Capitel alle möglichen Lagen, welche vier Strahlen haben können, ermittelt sind. Aus dieser Uebersicht erkennt man, dass Carnot die Sache nicht erschöpft hat, und dass seine Aufgaben XVIII—XXI durch unsere Formeln 20. a. 22. a. 32. a. 34. a vollständig erledigt sind.

§. 171.

Die beiden folgenden Carnot'schen Aufgaben:

Aufgabe XXII:

Wenn von den sechs Winkeln, welche die vier Seitenflächen eines Tetraeders bilden, fünf gegeben sind, den sechsten zu finden.

Aufgabe XXIII:

Von den sechs Winkeln, welche die vier Seiten eines sphärischen Vierecks bilden, die man bis zum Zusammenstossen verlängert, sind fünf gegeben; man sucht den sechsten

sind die in unserer Uebersicht §. 9 unter I. b. III. b genannten, durch die Formeln 20. b 22. b (25. b) und den allgemeinen Satz A. b in §. 23. tetraedrometrisch gelösten. Die von Carnot in trigonometrischen Functionen fehlerhaft (vergl. §. 37) gegebene Gleichung ist in 34. b richtig enthalten, und in 32. b in Beziehung auf jeden einzelnen Winkel aufgelöst. Das von Carnot und Schumacher begangene Versehen liegt in der Behauptung, dass die Gleichung 34. a sich nicht ändere, wenn die Vorzeichen der sämmtlichen Cosinus geändert werden.

Ebenso ist

Carnot's Aufgabe XXIV:

Wenn von den drei Winkeln, welche die Kanten einer dreieckigen Pyramide, die sich im Scheitel vereinigen, bilden, und den drei andern Winkeln, welche diese Kanten mit der Grundfläche der Pyramide bilden, fünf gegeben sind, den sechsten zu finden

durch die Gleichung 44. a (33. a) und deren Auflösungen 39. a erledigt.

§. 172.

Carnot's Aufgabe XXV.

Die Gleichung zu finden zwischen den drei Winkeln ($\overset{1}{H}_0, \overset{2}{H}_0, \overset{3}{H}_0$), unter welchen die Kanten einer Ecke (u, p, q) gegen die Seiten derselben $(\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3)$ geneigt sind, und den drei Winkeln $(\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \overset{3}{\eta})$, unter welchen eine beliebige vierte Gerade gegen dieselben Flächen geneigt ist.

Carnot's Auflösung (nach Schumacher's Uebersetzung. Die erklärenden Buchstabensymbole sind von mir hinzugefügt).

„Durch den Scheitelpunct (O) des Tetraeders ziehe ich eine der Transversale parallele Linie (h_0), die also mit den Seitenflächen dieselben Winkel $(\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \overset{3}{\eta})$ als die Transversale macht. — Ziehen

wir noch durch den Scheitelpunct drei Linien, die auf den Seitenflächen senkrecht stehen, so sind die Winkel dieser Linien mit der Parallele Complemente der Winkel $(\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \overset{3}{\eta})$ der Parallele mit den Seitenflächen. Bezeichnet man also die drei Kanten mit u, p, q, die diesen Kanten respective gegenüberstehenden Seitenflächen mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, die mit der Transversale parallele Linie mit h_0, so sind die Winkel, welche diese Linie mit den Perpendikeln auf den Seitenflächen bildet,

$$\tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\eta},\ \tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\eta},\ \tfrac{1}{2}\pi - \overset{3}{\eta}$$

Ebenso sind die Winkel der Perpendikel und gegenüberstehenden Kanten die Complemente der Winkel der Kanten und Seitenflächen. Die drei Perpendikel also und die Parallele mit der Transversale sind vier Linien, die von einem Puncte ausgehen, und folgende sechs Winkel bilden, wovon die drei letzten den drei ersten entgegengesetzt sind:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{H_0} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\eta}$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{H_0} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\eta}$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - \overset{3}{H_0} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \overset{3}{\eta}$$

Die Formel 34. a ist also auf diese sechs Winkel anwendbar, wenn man nur statt der Cosinus die Sinus in die Formel setzt.“

Feuerbach bemerkt in seinem „Grundriss etc.“ pg. 2, dass diese Auflösung „fehlerhaft“ sei, und beweist dies damit, dass sie für einen bestimmten Fall nicht „die Probe besteht.“ Sie ist aber nicht bloss im Einzelnen fehlerhaft, wie etwa die Auflösungen von XXII und XXIII, sondern schon in der Anlage falsch, indem die Winkel, welche die drei auf $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ in O errichteten Normalen mit den Kanten u, p, q bilden, verwechselt sind mit denjenigen, welche sie unter einander bilden, denn nur auf diese letztern nebst denjenigen, welche diese Normalen mit h_0 bilden, lässt sich die Gleichung 34. a anwenden.

§. 173.

Tetraedrometirsche Auflösung.

Carnot hat diese Aufgabe offenbar nur darum aufgenommen, weil ihm ihre Auflösung am Wege zu liegen schien. Für den

Zusammenhang seiner Schrift ist sie gleichgültig, und könnte auch fehlen. Nun liegt aber die richtige Auflösung mit nichten am Wege, sondern führt auf ein Gebiet, das vielleicht für eigens darauf gerichtete Untersuchungen sich dankbar erweisen möchte, hier aber nur berührt werden soll, um doch auch diese, von Carnot nun einmal gestellte Aufgabe nicht ungelöst zu lassen. Ihre Auflösung ist auch für das gegenwärtige System der Tetraedrometrie unerheblich.

Es ist klar, dass ein sphärisches Dreieck durch seine drei Höhenbogen $\overset{1}{H}$, $\overset{2}{H}$, $\overset{3}{H}$ bestimmt wird.*) Ist nun in einem so bestimmten Dreieck ein vierter Punct N durch zwei sphärische Abstände $\overset{2}{\eta}$, $\overset{3}{\eta}$ von den Seiten b, c bestimmt, so ist offenbar auch dessen sphärischer Abstand $\overset{1}{\eta}$ von der dritten Seite a bestimmt und es muss sich also eine Gleichung zwischen $\overset{1}{H}$, $\overset{2}{H}$, $\overset{3}{H}$, $\overset{1}{\eta}$, $\overset{2}{\eta}$, $\overset{3}{\eta}$ finden lassen.

Ist h_0 der vom Eckpunct O nach dem Puncte N gezogene Strahl, und errichtet man in irgend einem Puncte von h_0 (ausser O) eine normale Ebne $\triangle_0$, welche die Ecke zu einem Tetraeder $\mathfrak{T}$ abschliesst, so sind die Winkel α', β', γ', welche die Ebne $\triangle_0$ mit den Ebnen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ macht, die Complemente von $\overset{1}{\eta}$, $\overset{2}{\eta}$, $\overset{3}{\eta}$, und es gilt also für die letzteren die Gleichung, welche (nicht numerirt) im I. Theil pg. 56 zu Ende steht, wenn darin für α', β', γ' gesetzt wird: $\frac{1}{2}\pi - \overset{1}{\eta}$, $\frac{1}{2}\pi - \overset{2}{\eta}$, $\frac{1}{2}\pi - \overset{3}{\eta}$; also ist:

$$\begin{aligned} 4\,\Pi_0^2 = {} & \sin^2\overset{1}{\eta}\sin^2\alpha + 2\sin\overset{2}{\eta}\sin\overset{3}{\eta}\sin\beta\sin\gamma\cos a \\ & + \sin^2\overset{2}{\eta}\sin^2\beta + 2\sin\overset{1}{\eta}\sin\overset{3}{\eta}\sin\alpha\sin\gamma\cos b \\ & + \sin^2\overset{3}{\eta}\sin^2\gamma + 2\sin\overset{1}{\eta}\sin\overset{2}{\eta}\sin\alpha\sin\beta\cos c \end{aligned} \qquad (332.)$$

Gelingt es nun, Π_0, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$

*) Die Aufgabe: „Durch die drei Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks dessen übrige Bestimmungsstücke auszudrücken“ gehört der sphärischen Trigonometrie an, ist aber, so viel ich weiss, noch nicht ausführlich bearbeitet worden, obgleich ihre Auflösung zu manchen bemerkenswerthen Resultaten zu führen scheint.

durch die $\overset{1}{H}$, $\overset{2}{H}$, $\overset{3}{H}$ auszudrücken, so ist unsere Aufgabe durch diese Gleichung gelöst.

Nun ist nach 1. b, 10. b:

$$2\,\Pi = \sin a \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \sin\overset{1}{H}, \text{ also}$$

$$M \sin\beta \sin\gamma = \sin\overset{1}{H}$$

$$M \sin\alpha \sin\gamma = \sin\overset{2}{H}$$

$$M \sin\alpha \sin\beta = \sin\overset{3}{H} \text{ und daher:}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{M\sin\overset{1}{H}}, \text{ oder}$$

$$\sin a \sin\alpha = \frac{\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{1}{H}} \qquad (333.)$$

$$\sin^2 a = \frac{M\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{1}{H}}, \quad \cos^2 a = \frac{\sin^2\overset{1}{H} - M^2\sin^2\overset{2}{H}\sin^2\overset{3}{H}}{\sin^2\overset{1}{H}}$$

ferner

$$4\,\Pi^2 = \sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2 a = \frac{\sin\overset{1}{H}\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{M} \text{ oder}$$

$$4\,P\Pi = \sin\overset{1}{H}\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H} \qquad (334.)$$

also ist die obige Gleichung:

$$\sin\overset{1}{H}\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H} = \frac{\sin^2\overset{1}{\eta}\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{1}{H}} \qquad (335.)$$

$$+ 2\sin\overset{2}{\eta}\sin\overset{3}{\eta}\sqrt{\sin^2\overset{1}{H} - M^2\sin^2\overset{2}{H}\sin^2\overset{3}{H}}$$

$$+ \frac{\sin^2\overset{2}{\eta}\sin\overset{1}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{2}{H}}$$

$$+ 2\sin\overset{1}{\eta}\sin\overset{3}{\eta}\sqrt{\sin^2\overset{2}{H} - M^2\sin^2\overset{1}{H}\sin^2\overset{3}{H}}$$

$$+ \frac{\sin^2\overset{3}{\eta}\sin\overset{1}{H}\sin\overset{2}{H}}{\sin\overset{3}{H}}$$

$$+ 2\sin\overset{1}{\eta}\sin\overset{2}{\eta}\sqrt{\sin^2\overset{3}{H} - M^2\sin^2\overset{1}{H}\sin^2\overset{2}{H}}$$

worin nun noch M durch $\overset{1}{H}$, $\overset{2}{H}$, $\overset{3}{H}$ auszudrücken ist.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken, welche $\overset{2}{H}$ und $\overset{3}{H}$ im sphärischen Dreieck bilden, so wie aus 302 ergiebt sich:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{1}{H}\sin a}, \quad \sin\beta = \frac{\sin\overset{3}{H}}{\sin a}, \quad \sin\gamma = \frac{\sin\overset{2}{H}}{\sin a}$$

also

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\sin^2\overset{1}{H}\sin^2 a - \sin^2\overset{2}{H}\sin^2\overset{3}{H}}}{\sin\overset{1}{H}\sin a}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2\overset{3}{H}}}{\sin a},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2\overset{2}{H}}}{\sin a}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die bekannte Gleichung (§. 1 Nro. 3) für α, β, γ, a, und schreibt zur Abkürzung einstweilen

$$\sin\overset{1}{H} = h_1, \quad \sin\overset{2}{H} = h_2, \quad \sin\overset{3}{H} = h_3, \quad \sin a = a$$

so findet sich

$$a\sqrt{a^2h_1^2 - h_2^2h_3^2} + h_1\sqrt{a^2 - h_2^2}\sqrt{a^2 - h_3^2} = h_1h_2h_3\sqrt{1-a^2}$$

Aus den rechtwinkligen Theildreiecken des Dreiecks und aus 333 ergiebt sich aber auch

$$\sin a = \frac{\sin\overset{2}{H}\sin\overset{3}{H}}{\sin\overset{1}{H}\sin\alpha}, \quad \sin b = \frac{\sin\overset{3}{H}}{\sin\alpha}, \quad \sin c = \frac{\sin\overset{2}{H}}{\sin\alpha}$$

also, wenn man zu den obigen Abkürzungen noch α statt $\sin\alpha$ fügt:

$$\cos a = \frac{\sqrt{\alpha^2h_1^2 - h_2^2h_3^2}}{\alpha}, \quad \cos b = \frac{\sqrt{\alpha^2 - h_3^2}}{\alpha}, \quad \cos c = \frac{\sqrt{\alpha^2 - h_2^2}}{\alpha}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (§. 1 Nr. 2) für a, b, c, α, so wird

$$a\sqrt{\alpha^2h_1^2 - h_2^2h_3^2} - h_1\sqrt{\alpha^2 - h_2^2}\sqrt{\alpha^2 - h_3^2} = h_1h_2h_3\sqrt{1-\alpha^2}$$

Beide Gleichungen werden übersichtlicher, wenn man sie durch $h_1h_2h_3$ dividirt, nämlich:

$$\sqrt{\frac{a^4}{h_2^2h_3^2} - \frac{a^2}{h_1^2}} + \sqrt{\frac{a^2}{h_2^2} - 1}\sqrt{\frac{a^2}{h_3^2} - 1} = \sqrt{1-a^2} \quad (336.)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^4}{h_2^2h_3^2} - \frac{\alpha^2}{h_1^2}} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{h_2^2} - 1}\sqrt{\frac{\alpha^2}{h_3^2} - 1} = \sqrt{1-\alpha^2} \quad (337.)$$

Die erste dieser Gleichungen quadrirt wird:

$$\frac{2\,a^4}{h_2^2 h_3^2} - \frac{a^2}{h_1^2} - \frac{a^2}{h_2^2} - \frac{a^2}{h_3^2} + a^2 = -2\sqrt{\left(\frac{a^4}{h_2^2 h_3^2} - \frac{a^2}{h_1^2}\right)\left(\frac{a^2}{h_2^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{h_3^2} - 1\right)}$$

woraus durch abermalige Quadrirung und einige Reductionen hervorgeht:

$$a^4 - h_2^2 h_3^2 \left\{ \frac{1}{h_2^2 h_3^2} + \frac{1}{h_1^2 h_3^2} + \frac{1}{h_1^2 h_2^2} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} - 1\right)^2 \right\} a^2 + \frac{h_2^2 h_3^2}{h_1^2} = 0 \qquad (338.)$$

Wird nun die Gleichung 337 ebenso behandelt, so führt sie auf dieselbe Gleichung 338, worin nur α statt a erscheint. Es ist also $\sin^2 \alpha$ ebenso wohl als $\sin^2 a$ eine Wurzel der für a^2 quadratischen Gleichung 338.

Setzen wir nun den Factor

$$\left.\begin{array}{l} \csc^2 \overset{2}{H} \csc^2 \overset{3}{H} + \csc^2 \overset{1}{H} \csc^2 \overset{3}{H} + \csc^2 \overset{1}{H} \csc^2 \overset{2}{H} \\ -\tfrac{1}{4}\left(\csc^2 \overset{1}{H} + \csc^2 \overset{2}{H} + \csc^2 \overset{3}{H} - 1\right)^2 \end{array}\right\} = A$$

und $a^2 = x$, so haben wir

$$x^2 - h_2^2 h_3^2 A \cdot x + \frac{h_2^2 h_3^2}{h_1^2} = 0$$

Da nun die Wurzeln dieser Gleichung $\sin^2 a$ und $\sin^2 \alpha$ sind, so ist

$$\sin^2 a + \sin^2 \alpha = h_2^2 h_3^2 A$$

$$2 \sin a \sin \alpha = \frac{2\,h_2 h_3}{h_1}$$

und daraus

$$\sin a + \sin \alpha = \sqrt{\frac{h_2 h_3}{h_1}}\sqrt{A h_1 h_2 h_3 + 2}$$

$$\sin a - \sin \alpha = \sqrt{\frac{h_2 h_3}{h_1}}\sqrt{A h_1 h_2 h_3 - 2}$$

woraus sich findet

$$M = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{A h_1 h_2 h_3 + 2} + \sqrt{A h_1 h_2 h_3 - 2}}{\sqrt{A h_1 h_2 h_3 + 2} - \sqrt{A h_1 h_2 h_3 - 2}}$$

oder

$$M = \tfrac{1}{2} A \sin \overset{1}{H} \sin \overset{2}{H} \sin \overset{3}{H} + \tfrac{1}{2} \sqrt{A^2 \sin^2 \overset{1}{H} \sin^2 \overset{2}{H} \sin^2 \overset{3}{H} - 4}$$

welcher Werth in 335 einzusetzen ist. (339.)

§. 174.

Carnot's Aufgabe XXVI.

Wenn von zehn Linien, die fünf im Raume gegebene Puncte verbinden, neun gegeben sind, die zehnte zu finden.

Auflösung. Sind die fünf gegebenen Puncte O, A, B, C, K und bezeichnet man die Kanten des Tetraeders $OABC$ nach §. 103 mit l, m, n, u, p, q, die vier von K nach O, A, B, C gezogenen Linien mit r_0, r_1, r_2, r_3 und die von ihnen bei K gebildeten sechs Winkel mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$, so besteht für diese letzteren die Gleichung 34. a, und zwar für alle Lagen von K in- oder ausserhalb des Tetraeders $OABC$:

$$\begin{aligned}
1 = \quad & \cos^2 \mathfrak{a} + \cos^2 \mathfrak{a}' - 2 \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b}' \cos \mathfrak{c}' \\
& + \cos^2 \mathfrak{b} + \cos^2 \mathfrak{b}' - 2 \cos \mathfrak{a}' \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c}' \\
& + \cos^2 \mathfrak{c} + \cos^2 \mathfrak{c}' - 2 \cos \mathfrak{a}' \cos \mathfrak{b}' \cos \mathfrak{c} \\
& - 2 \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c} \\
& - \cos^2 \mathfrak{a} \cos^2 \mathfrak{a}' + 2 \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{b}' \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{c}' \\
& - \cos^2 \mathfrak{b} \cos^2 \mathfrak{b}' + 2 \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{a}' \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{c}' \\
& - \cos^2 \mathfrak{c} \cos^2 \mathfrak{c}' + 2 \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{a}' \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{b}'
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\cos \mathfrak{a} = \frac{r_2^2 + r_3^2 - l^2}{2 r_2 r_3} \qquad \cos \mathfrak{a}' = \frac{r_0^2 + r_1^2 - u^2}{2 r_0 r_1}$$

$$\cos \mathfrak{b} = \frac{r_1^2 + r_3^2 - m^2}{2 r_1 r_3} \qquad \cos \mathfrak{b}' = \frac{r_0^2 + r_2^2 - p^2}{2 r_0 r_2}$$

$$\cos \mathfrak{c} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - n^2}{2 r_1 r_2} \qquad \cos \mathfrak{c}' = \frac{r_0^2 + r_3^2 - q^2}{2 r_0 r_3}$$

„Setzt man diese Werthe in die obige Gleichung, bringt alles auf denselben Nenner $16 r_0^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2$ und hebt die Glieder, bei denen es angeht, auf, so erhält man nach einer langen Rechnung folgende symmetrische Formel“:

$$
\begin{aligned}
& p^4m^4 + p^4r_1^4 + p^4r_3^4 + q^4r_1^4 + q^4r_2^4 + q^4n^4 \qquad (340.)\\
& + u^4l^4 + u^4r_2^4 + u^4r_3^4 + l^4r_0^4 + m^4r_0^4 + n^4r_0^4\\
& + l^4r_1^4 + m^4r_2^4 + n^4r_3^4\\
& - 2\,(\; p^4m^2r_1^2 + p^4m^2r_3^2 + p^4r_3^2r_1^2\\
& \quad + q^4r_1^2r_2^2 + q^4n^2r_1^2 + q^4n^2r_2^2\\
& \quad + u^4l^2r_2^2 + u^4l^2r_3^2 + u^4r_2^2r_3^2\\
& \quad + r_0^4l^2m^2 + r_0^4l^2n^2 + r_0^4m^2n^2\\
& \quad + l^4u^2r_0^2 + l^4u^2r_1^2 + l^4r_0^2r_1^2\\
& \quad + m^4p^2r_0^2 + m^4p^2r_2^2 + m^4r_0^2r_2^2\\
& \quad + r_1^4p^2q^2 + r_1^4p^2l^2 + r_1^4q^2l^2\\
& \quad + r_2^4u^2q^2 + r_2^4q^2m^2 + r_2^4u^2m^2\\
& \quad + r_3^4u^2p^2 + r_3^4u^2n^2 + r_3^4p^2n^2\\
& \quad + n^4q^2r_0^2 + n^4q^2r_3^2 + n^4r_0^2r_3^2)\\
& - 4\,(l^2m^2n^2r_0^2 + l^2p^2q^2r_1^2 + u^2m^2q^2r_2^2 + u^2p^2n^2r_3^2\\
& \quad + u^2l^2r_0^2r_1^2 + p^2m^2r_0^2r_2^2 + q^2n^2r_0^2r_3^2 + u^2l^2r_2^2r_3^2\\
& \quad + p^2m^2r_1^2r_3^2 + q^2n^2r_1^2r_2^2)\\
& - 2\,(p^2q^2m^2n^2 + p^2q^2r_2^2r_3^2 + m^2n^2r_2^2r_3^2 + p^2n^2r_0^2r_1^2\\
& \quad + q^2m^2r_0^2r_1^2 + u^2q^2l^2n^2 + u^2q^2r_1^2r_3^2 + l^2n^2r_1^2r_3^2\\
& \quad + u^2n^2r_0^2r_2^2 + q^2l^2r_0^2r_2^2 + u^2p^2l^2m^2 + u^2p^2r_1^2r_2^2\\
& \quad + l^2m^2r_1^2r_2^2 + u^2m^2r_0^2r_3^2 + p^2l^2r_0^2r_3^2)\\
& + 2\,(p^2q^2m^2r_1^2 + p^2q^2m^2r_2^2 + p^2q^2n^2r_1^2 + p^2q^2n^2r_2^2\\
& \quad + u^2q^2l^2r_1^2 + u^2q^2l^2r_3^2 + u^2q^2n^2r_2^2 + u^2q^2n^2r_3^2\\
& \quad + u^2p^2l^2r_1^2 + u^2p^2l^2r_3^2 + u^2p^2m^2r_2^2 + u^2p^2m^2r_3^2\\
& \quad + m^2n^2p^2r_0^2 + m^2n^2p^2r_3^2 + m^2n^2q^2r_0^2 + m^2n^2q^2r_2^2\\
& \quad + l^2n^2u^2r_0^2 + l^2n^2u^2r_3^2 + l^2n^2q^2r_0^2 + l^2n^2q^2r_1^2\\
& \quad + l^2m^2u^2r_0^2 + l^2m^2u^2r_2^2 + l^2m^2p^2r_1^2 + l^2m^2p^2r_0^2\\
& \quad + p^2q^2r_1^2r_2^2 + p^2q^2r_1^2r_3^2 + m^2n^2r_0^2r_2^2 + m^2n^2r_0^2r_3^2\\
& \quad + u^2q^2r_2^2r_3^2 + u^2q^2r_1^2r_2^2 + u^2n^2r_2^2r_3^2 + u^2n^2r_0^2r_3^2\\
& \quad + u^2p^2r_2^2r_3^2 + u^2p^2r_1^2r_3^2 + u^2m^2r_2^2r_3^2 + u^2m^2r_0^2r_2^2\\
& \quad + p^2n^2r_1^2r_3^2 + p^2n^2r_0^2r_3^2 + m^2q^2r_0^2r_2^2 + m^2q^2r_1^2r_2^2\\
& \quad + l^2n^2r_0^2r_1^2 + l^2n^2r_0^2r_3^2 + l^2q^2r_0^2r_1^2 + l^2q^2r_1^2r_2^2\\
& \quad + l^2p^2r_0^2r_1^2 + l^2p^2r_1^2r_3^2 + l^2m^2r_0^2r_1^2 + l^2m^2r_0^2r_2^2\\
& \quad + u^2l^2r_0^2r_3^2 + u^2l^2r_1^2r_2^2 + u^2l^2r_0^2r_2^2 + u^2l^2r_1^2r_3^2\\
& \quad + p^2m^2r_0^2r_3^2 + p^2m^2r_1^2r_2^2 + p^2m^2r_0^2r_1^2 + p^2m^2r_2^2r_3^2\\
& \quad + q^2n^2r_0^2r_1^2 + q^2n^2r_2^2r_3^2 + q^2n^2r_0^2r_2^2 + q^2n^2r_1^2r_3^2)\\
& = 0.
\end{aligned}
$$

Das „Memoire“ bemerkt zu dieser Gleichung: „Obgleich diese

Formel von 130 Gliedern beim ersten Anblick etwas verwickelt scheint, so ist sie doch symmetrisch und einem leicht aufzufassenden Gesetze unterworfen. Denn

1) Die 15 ersten Glieder sind die Producte der vierten Potenz derjenigen Kanten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben. Wir bezeichnen diese Summe mit F.

2) Die 30 folgenden Glieder sind die doppelte Summe der Producte jeder Kante in der vierten Potenz mit den Quadraten zweier gegenüberstehenden Seiten. Es sei diese Summe $= G$.

3) Die 10 folgenden Glieder bilden die vierfache Summe der Producte der Quadrate jeder Kante mit dem Producte der Quadrate der drei gegenüberstehenden multiplicirt. Es sei diese Summe $= H$.

4) Die 15 folgenden Glieder bilden die doppelte Summe der Producte der Quadrate der Seiten eines jeden der Vierecke, die nicht in einer Ebne liegen und bei der Construction der Pyramide vorkommen. Es sei diese Summe $= K$.

5) Endlich die 60 letzten Glieder bilden die doppelte Summe der Producte der Quadrate der vier Kanten, die den Umfang eines Fünfecks, das nicht in einer Ebne liegt, bilden würden, von dem man die eine Seite weggenommen hat. So z. B. ist $KCAOBK$ der Umfang eines solchen Fünfecks, dessen Seiten KC, CA, AO, OB, BK sind; nimmt man BK weg, so bleiben die übrigen, aus denen das zwölfte Glied der letzten 60, nämlich $u^2p^2m^2r_3^2$ besteht. Ist diese Summe nun L, so kann man die Formel 340 so ausdrücken:

$$F - 2G - 4H - 2K + 2L = 0\text{“} \qquad (340.^*)$$

In dieser Aufzählung können die 130 Glieder dieser Gleichung, welche Carnot wiederholt für den eigentlichen Gegenstand des Memoire's erklärt, doch nur etwa ein ähnliches Interesse in Anspruch nehmen, wie fünf zur Schau gestellte Haufen von Bausteinen, die so geschichtet sind, dass jeder Haufen die nach einerlei Form zugehauenen Stücke vereinigt, und mit einer Nummer F, G u. s. w. versehen ist. Ein Gefühl der Befriedigung kann der Anblick dieser Moles erst dann gewähren, wenn die Baustücke zu einem architectonisch gegliederten Bau zusammengefügt sind, durch welchen ihre Einzelformen erst verständlich werden, etwa in der Weise, wie aus den Gliederschichten 263, 264, 269 die Formeln 267, 268, 284, 286 gebaut sind.

§. 175.

Wenn man nun versucht, aus den 130 Werkstücken der Gleichung 340 einen solchen Bau aufzuführen, so macht es sich recht fühlbar, wie viel zur Entdeckung algebraisch-geometrischer Gesetze auf eine sorgfältige Auswahl der Bezeichnungen ankommt, wenn, wie bei fast allen tetraedrometrischen Rechnungen, der einzuführenden Grössen viele sind. Carnot (oder Schumacher) hat die zehn Distanzen der fünf Puncte mit den Buchstaben $f, g, h, l, m, n, p, q, r, s$ so bezeichnet, dass nicht einmal die alphabetische Gruppirung derselben der geometrischen Einbildungskraft zu Hülfe kommt, und Jeder, der die Gleichung im Schumacherschen Werke (II. pg. 302) betrachtet, wird wohl darauf verzichten, in dieser Gestalt noch ein anderes, organisches Gesetz zu entdecken, als das von Carnot angegebene, ganz äusserlich schematisirende. Nur dadurch ist mir die Auffindung desselben, wenn auch nicht mühelos, doch überhaupt möglich geworden, dass ich mir die Gleichung in die gewohnten, mehr unterscheidenden Zeichen umsetzte, wonach man sich l, m, n als die drei Seiten eines Dreiecks, u, p, q als drei von dessen Eckpuncten A, B, C aufsteigende, in O zusammenstossende Kanten denkt, und unter r_0, r_1, r_2, r_3 vier von einem beliebigen Puncte K nach den Eckpuncten des Tetraeders $OABC$ gezogene Gerade. Da die Gleichung 34. a keine Unterschiede für die verschiedenen Lagen der vier Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 enthält, so gelten die daraus abgeleiteten Gleichungen für alle möglichen Lagen, welche die fünf Puncte O, A, B, C, K gegen einander haben können, und man kann, ohne die Allgemeingültigkeit der Formeln zu beeinträchtigen, bei der Entwickelung diejenige Vorstellung festhalten, welcher sich die Einbildungskraft am leichtesten bemächtigt: dass K innerhalb des von O, A, B, C bestimmten Tetraeders liege, und die r_0, r_1, r_2, r_3 dasselbe in die Theiltetraeder t_0, t_1, t_2, t_3 zerlegen.

In den fünf Tetraedern sind nun Gegenkanten zu einander:

in $\mathfrak{T}$:	l	und	u,	m und p,	n und	q
» t_0:	l	»	r_1,	m » r_2,	n »	r_3
» t_1:	l	»	r_0,	p » r_3,	q »	r_2
» t_2:	u	»	r_3,	m » r_0,	q »	r_1
» t_3:	u	»	r_2,	p » r_1,	n »	r_0

In jedem der Tetraeder nennen wir dasjenige Paar, zu welchem l oder u gehört, das erste, dasjenige, wozu m oder p gehört, das zweite, dasjenige, wozu n oder q gehört, das dritte Paar von Gegenkanten.

Die Gleichung 340 lässt sich nun so schreiben:

$$\begin{aligned}
& l^2u^2\ (-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2) \qquad (341.)\\
&+m^2p^2(\ \ l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2)\\
&+n^2q^2\ (\ \ l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2)\\
&+l^2r_1^2\ (-l^2r_1^2+m^2r_2^2+n^2r_3^2)\\
&+m^2r_2^2(\ \ l^2r_1^2-m^2r_2^2+n^2r_3^2)\\
&+n^2r_3^2\ (\ \ l^2r_1^2+m^2r_2^2-n^2r_3^2)\\
&+l^2r_0^2\ (-l^2r_0^2+p^2r_3^2+q^2r_2^2)\\
&+p^2r_3^2\ (\ \ l^2r_0^2-p^2r_3^2+q^2r_2^2)\\
&+q^2r_2^2\ (\ \ l^2r_0^2+p^2r_3^2-q^2r_2^2)\\
&+u^2r_3^2\ (-u^2r_3^2+m^2r_0^2+q^2r_1^2)\\
&+m^2r_0^2(\ \ u^2r_3^2-m^2r_0^2+q^2r_1^2)\\
&+q^2r_1^2\ (\ \ u^2r_3^2+m^2r_0^2-q^2r_1^2)\\
&+u^2r_2^2\ (-u^2r_2^2+p^2r_1^2+n^2r_0^2)\\
&+p^2r_1^2\ (\ \ u^2r_2^2-p^2r_1^2+n^2r_0^2)\\
&+n^2r_0^2(\ \ u^2r_2^2+p^2r_1^2-n^2r_0^2)
\end{aligned}$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
r_0^2\Big\{ & l^2\ (-l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2 && -l^2r_1^2+m^2r_2^2+n^2r_3^2)\\
&+m^2(\ \ l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2 && +l^2r_1^2-m^2r_2^2+n^2r_3^2)\\
&+n^2\ (\ \ l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2 && +l^2r_1^2+m^2r_2^2-n^2r_3^2)\\
&-2\,l^2m^2n^2 && -2\,l^2m^2n^2\Big\}\\
+r_1^2\Big\{ & l^2\ (-l^2u^2+p^2m^2+q^2n^2 && -l^2r_0^2+p^2r_3^2+q^2r_2^2)\\
&+p^2(\ \ l^2u^2-p^2m^2+q^2n^2 && +l^2r_0^2-p^2r_3^2+q^2r_2^2)\\
&+q^2(\ \ l^2u^2+p^2m^2-q^2n^2 && +l^2r_0^2+p^2r_3^2-q^2r_2^2)\\
&-2\,l^2p^2q^2 && -2\,l^2p^2q^2\Big\}\\
+r_2^2\Big\{ & u^2\ (-u^2l^2+m^2p^2+q^2n^2 && -u^2r_3^2+m^2r_0^2+q^2r_1^2)\\
&+m^2(\ \ u^2l^2-m^2p^2+q^2n^2 && +u^2r_3^2-m^2r_0^2+q^2r_1^2)\\
&+q^2\ (\ \ u^2l^2+m^2p^2-q^2n^2 && +u^2r_3^2+m^2r_0^2-q^2r_1^2)\\
&-2\,u^2m^2q^2 && -2\,u^2m^2q^2\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l}
+r_3^2 \left\{ \begin{array}{ll} u^2(-u^2l^2+p^2m^2+n^2q^2 & -u^2r_2^2+p^2r_1^2+n^2r_0^2) \\ +p^2(\ u^2l^2-p^2m^2+n^2q^2 & +u^2r_2^2-p^2r_1^2+n^2r_0^2) \\ +n^2(\ u^2l^2+p^2m^2-n^2q^2 & +u^2r_2^2+p^2r_1^2-n^2r_0^2) \\ -2u^2p^2n^2 & -2u^2p^2n^2 \end{array} \right\} \\
+l^2 \left\{ \begin{array}{ll} u^2(-u^2r_3^2+r_0^2m^2+r_1^2q^2 & -u^2r_2^2+r_0^2n^2+r_1^2p^2) \\ +r_0^2(\ u^2r_3^2-r_0^2m^2+r_1^2q^2 & +u^2r_2^2-r_0^2n^2+r_1^2p^2) \\ +r_1^2(\ u^2r_3^2+r_0^2m^2-r_1^2q^2 & +u^2r_2^2+r_0^2n^2-r_1^2p^2) \\ -2u^2r_0^2r_1^2 & -2u^2r_0^2r_1^2 \end{array} \right\} \\
+m^2 \left\{ \begin{array}{ll} r_0^2(-r_0^2n^2+p^2r_1^2+r_2^2u^2 & -r_0^2l^2+p^2r_3^2+r_2^2q^2) \\ +p^2(\ r_0^2n^2-p^2r_1^2+r_2^2u^2 & +r_0^2l^2-p^2r_3^2+r_2^2q^2) \\ +r_2^2(\ r_0^2n^2+p^2r_1^2-r_2^2u^2 & +r_0^2l^2+p^2r_3^2-r_2^2q^2) \\ -2r_0^2p^2r_2^2 & -2r_0^2p^2r_2^2 \end{array} \right\} \\
+n^2 \left\{ \begin{array}{ll} r_0^2(-r_0^2l^2+r_3^2p^2+q^2r_2^2 & -r_0^2m^2+r_3^2u^2+q^2r_1^2) \\ +r_3^2(\ r_0^2l^2-r_3^2p^2+q^2r_2^2 & +r_0^2m^2-r_3^2u^2+q^2r_1^2) \\ +q^2(\ r_0^2l^2+r_3^2p^2-q^2r_2^2 & +r_0^2m^2+r_3^2u^2-q^2r_1^2) \\ -2r_0^2r_3^2q^2 & -2r_0^2r_3^2q^2 \end{array} \right\} \\
+u^2 \left\{ \begin{array}{ll} l^2(-l^2r_1^2+r_2^2m^2+r_3^2n^2 & -l^2r_0^2+r_2^2q^2+r_3^2p^2) \\ +r_2^2(\ l^2r_1^2-r_2^2m^2+r_3^2n^2 & +l^2r_0^2-r_2^2q^2+r_3^2p^2) \\ +r_3^2(\ l^2r_1^2+r_2^2m^2-r_3^2n^2 & +l^2r_0^2+r_2^2q^2-r_3^2p^2) \\ -2l^2r_2^2r_3^2 & -2l^2r_2^2r_3^2 \end{array} \right\} \\
+p^2 \left\{ \begin{array}{ll} r_1^2(-r_1^2l^2+m^2r_2^2+r_3^2n^2 & -r_1^2q^2+m^2r_0^2+r_3^2u^2) \\ +m^2(\ r_1^2l^2-m^2r_2^2+r_3^2n^2 & +r_1^2q^2-m^2r_0^2+r_3^2u^2) \\ +r_3^2(\ r_1^2l^2+m^2r_2^2-r_3^2n^2 & +r_1^2r^2+m^2r_0^2-r_3^2u^2) \\ -2r_1^2m^2r_3^2 & -2r_1^2m^2r_3^2 \end{array} \right\} \\
+q^2 \left\{ \begin{array}{ll} r_1^2(-r_1^2l^2+r_2^2m^2+n^2r_3^2 & -r_1^2p^2+r_2^2u^2+n^2r_0^2) \\ +r_2^2(\ r_1^2l^2-r_2^2m^2+n^2r_3^2 & +r_1^2p^2-r_2^2u^2+n^2r_0^2) \\ +n^2(\ r_1^2l^2+r_2^2m^2-n^2r_3^2 & +r_1^2p^2+r_2^2u^2-n^2r_0^2) \\ -2r_1^2r_2^2n^2 & -2r_1^2r_2^2n^2 \end{array} \right\}
\end{array}
$$

Die Glieder, welche oberhalb des Gleichheitszeichens stehen, enthalten die Gruppen $-F+2K$ der Carnot'schen Gleichung 340. Von den 45 Gliedern, welche die Entwickelung der Producte ergiebt, bilden 15 die Gruppe $-F$, die übrigen 30, von denen immer zwei gleich sind, die Gruppe $2K$.

Die Entwickelung der unterhalb des Gleichheitszeichens stehenden Gruppen ergiebt 200 einzelne Glieder, von denen je zwei einander gleich sind. Sie umfassen die Gruppen $-2G+2L-4H$.

§. 176.

Die einzelnen Gruppen, in welche die Gleichung nach der letzten Form 341 sich organisirt, haben sämmtlich oberhalb des Gleichheitszeichens die Form der rechten Seite von 283 oder 284, unterhalb die Form der rechten Seite von 288. — Bezeichnen wir nach Analogie der schon dort gewählten Zeichen:

$$\begin{aligned} -l^2u^2+m^2p^2+n^2q^2&=X\\ l^2u^2-m^2p^2+n^2q^2&=Y\\ l^2u^2+m^2p^2-n^2q^2&=Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -l^2r_1^2+m^2r_2^2+n^2r_3^2&=X_0\\ l^2r_1^2-m^2r_2^2+n^2r_3^2&=Y_0\\ l^2r_1^2+m^2r_2^2-n^2r_3^2&=Z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -l^2r_0^2+p^2r_3^2+q^2r_2^2&=X_1\\ l^2r_0^2-p^2r_3^2+q^2r_2^2&=Y_1\\ l^2r_0^2+p^2r_3^2-q^2r_2^2&=Z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -u^2r_3^2+m^2r_0^2+q^2r_1^2&=X_2\\ u^2r_3^2-m^2r_0^2+q^2r_1^2&=Y_2\\ u^2r_3^2+m^2r_0^2-q^2r_1^2&=Z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -u^2r_2^2+p^2r_1^2+n^2r_0^2&=X_3\\ u^2r_2^2-p^2r_1^2+n^2r_0^2&=Y_3\\ u^2r_2^2+p^2r_1^2-n^2r_0^2&=Z_3 \end{aligned}$$

so lässt sich die Gleichung in folgende Form bringen:

$$
\begin{aligned}
& l^2 u^2 X + m^2 p^2 Y + n^2 q^2 Z \qquad (342.)\\
& + l^2 r_1^2 X_0 + m^2 r_2^2 Y_0 + n^2 r_3^2 Z_0\\
& + l^2 r_0^2 X_1 + p^2 r_3^2 Y_1 + q^2 r_2^2 Z_1\\
& + u^2 r_3^2 X_2 + m^2 r_0^2 Y_2 + q^2 r_1^2 Z_2\\
& + u^2 r_2^2 X_3 + p^2 r_1^2 Y_3 + n^2 r_0^2 Z_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0^2 \Big\{ & l^2 X + m^2 Y + n^2 Z - 2 l^2 m^2 n^2 \Big\}\\
\Big\{ & + l^2 X_0 + m^2 Y_0 + n^2 Z_0 - 2 l^2 m^2 n^2 \Big\}\\
+ r_1^2 \Big\{ & l^2 X + p^2 Y + q^2 Z - 2 l^2 p^2 q^2 \Big\}\\
\Big\{ & + l^2 X_1 + p^2 Y_1 + q^2 Z_1 - 2 l^2 p^2 q^2 \Big\}\\
+ r_2^2 \Big\{ & u^2 X + m^2 Y + q^2 Z - 2 u^2 m^2 q^2 \Big\}\\
\Big\{ & + u^2 X_2 + m^2 Y_2 + q^2 Z_2 - 2 u^2 m^2 q^2 \Big\}\\
+ r_3^2 \Big\{ & u^2 X + p^2 Y + n^2 Z - 2 u^2 p^2 n^2 \Big\}\\
\Big\{ & + u^2 X_3 + p^2 Y_3 + n^2 Z_3 - 2 u^2 p^2 n^2 \Big\}\\
+ l^2 \Big\{ & u^2 X_2 + r_0^2 Y_2 + r_1^2 Z_2 - 2 u^2 r_0^2 r_1^2 \Big\}\\
\Big\{ & + u^2 X_3 + r_0^2 Z_3 + r_1^2 Y_3 - 2 u^2 r_0^2 r_1^2 \Big\}\\
+ m^2 \Big\{ & r_0^2 X_1 + p^2 Y_1 + r_2^2 Z_1 - 2 r_0^2 p^2 r_2^2 \Big\}\\
\Big\{ & + r_0^2 Z_3 + p^2 Y_3 + r_2^2 X_3 - 2 r_0^2 p^2 r_2^2 \Big\}\\
+ n^2 \Big\{ & r_0^2 X_1 + r_3^2 Y_1 + q^2 Z_1 - 2 r_0^2 r_3^2 q^2 \Big\}\\
\Big\{ & + r_0^2 Y_2 + r_3^2 X_2 + q^2 Z_2 - 2 r_0^2 r_3^2 q^2 \Big\}\\
+ u^2 \Big\{ & l^2 X_0 + r_2^2 Y_0 + r_3^2 Z_0 - 2 l^2 r_2^2 r_3^2 \Big\}\\
\Big\{ & + l^2 X_1 + r_2^2 Z_1 + r_3^2 Y_1 - 2 l^2 r_2^2 r_3^2 \Big\}\\
+ p^2 \Big\{ & r_1^2 X_0 + m^2 Y_0 + r_3^2 Z_0 - 2 r_1^2 m^2 r_3^2 \Big\}\\
\Big\{ & + r_1^2 Z_2 + m^2 Y_2 + r_3^2 X_2 - 2 r_1^2 m^2 r_3^2 \Big\}\\
+ q^2 \Big\{ & r_1^2 X_0 + r_2^2 Y_0 + n^2 Z_0 - 2 r_1^2 r_2^2 n^2 \Big\}\\
\Big\{ & + r_1^2 Y_3 + r_2^2 X_3 + n^2 Z_3 - 2 r_1^2 r_2^2 n^2 \Big\}
\end{aligned}
$$

§. 177.

Vermöge der Gleichungen 284 und 288 folgt hieraus ein höchst merkwürdiger Lehrsatz für fünf Puncte im Raume, für

dessen algebraischen Ausdruck aber noch eine Anzahl neuer Bezeichnungen einzuführen ist.

Das Tetraeder $\mathfrak{T}$ werde hier mit t bezeichnet. — Denken wir uns für jedes der fünf Tetraeder t, t_0, t_1, t_2, t_3 die umschriebene Kugel, so seien k, k_0, k_1, k_2, k_3 deren Radien. Die je vier „Centralpyramiden“, welche für jedes Tetraeder die durch das Centrum der umschriebenen Kugel und die sechs Kanten gelegten Ebnen mit den Ebnen des Tetraeders bilden, heissen

für t : $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$
$\overset{0}{\mathfrak{p}}_0, \overset{0}{\mathfrak{p}}_1, \overset{0}{\mathfrak{p}}_2, \overset{0}{\mathfrak{p}}_3$
» t_0: $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$
$\overset{1}{\mathfrak{p}}_0, \overset{1}{\mathfrak{p}}_1, \overset{1}{\mathfrak{p}}_2, \overset{1}{\mathfrak{p}}_3$
» t_1: $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$
$\overset{2}{\mathfrak{p}}_0, \overset{2}{\mathfrak{p}}_1, \overset{2}{\mathfrak{p}}_2, \overset{2}{\mathfrak{p}}_3$
» t_2: $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$
$\overset{3}{\mathfrak{p}}_0, \overset{3}{\mathfrak{p}}_1, \overset{3}{\mathfrak{p}}_2, \overset{3}{\mathfrak{p}}_3$
» t_3: $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$

und zwar für t in der Weise, wie es bisher nach §. 103 gehalten ist; für t_0 ebenso, nur dass statt des Punctes O der Punct K als Gegenpunct des Dreiecks ABC zu nehmen ist; für t_1 wieder so, nur dass statt A der Punct K als Gegenpunct des Dreiecks BOC eintritt u. s. w. Bezeichnen wir z. B. einmal einstweilen mit N das Centrum der dem t_2 umschriebenen Kugel, so ist

$$\overset{2}{\mathfrak{p}}_0 = NKAC,\ \overset{2}{\mathfrak{p}}_1 = NKOC,\ \overset{2}{\mathfrak{p}}_2 = NOAC,\ \overset{2}{\mathfrak{p}}_3 = NKOA.$$

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die Gleichung 342, nachdem sie durch 16. 9 dividirt ist, vermöge 284 und 288 so schreiben:

$$\begin{aligned} 2\,(t^2\varkappa^2 + t_0^2\varkappa_0^2 + t_1^2\varkappa_1^2 + t_2^2\varkappa_2^2 + t_3^2\varkappa_3^2) \qquad (343.)\\ = \quad t\ (\mathfrak{p}_0 r_0^2 + \mathfrak{p}_1 r_1^2 + \mathfrak{p}_2 r_2^2 + \mathfrak{p}_3 r_3^2)\\ + t_0\,(\overset{0}{\mathfrak{p}}_0 r_0^2 + \overset{0}{\mathfrak{p}}_1 u^2 + \overset{0}{\mathfrak{p}}_2 p^2 + \overset{0}{\mathfrak{p}}_3 q^2)\\ + t_1\,(\overset{1}{\mathfrak{p}}_0 u^2 + \overset{1}{\mathfrak{p}}_1 r_1^2 + \overset{1}{\mathfrak{p}}_2 n^2 + \overset{1}{\mathfrak{p}}_3 m^2)\\ + t_2\,(\overset{2}{\mathfrak{p}}_0 p^2 + \overset{2}{\mathfrak{p}}_1 n^2 + \overset{2}{\mathfrak{p}}_2 r_2^2 + \overset{2}{\mathfrak{p}}_3 l^2)\\ + t_3\,(\overset{3}{\mathfrak{p}}_0 q^2 + \overset{3}{\mathfrak{p}}_1 m^2 + \overset{3}{\mathfrak{p}}_2 l^2 + \overset{3}{\mathfrak{p}}_3 r_3^2) \end{aligned}$$

d. h.: Für fünf beliebige Puncte im Raume und die dadurch bestimmten fünf Tetraeder ist die doppelte Quadratsumme der Producte aus jedem der fünf Tetraeder und dem Radius seiner umschriebenen Kugel gleich

der Summe der Producte aus jedem Tetraeder und der Summe der Producte aus jeder seiner Centralpyramiden und dem Quadrate derjenigen Kante, welche mit derselben keinen Punct gemein hat.

§. 178.

Carnot's Aufgabe XXVII.

Wenn man die Entfernungen fünf beliebiger Puncte im Raume kennt, den Neigungswinkel zu finden, den eine Linie, die durch zwei dieser Puncte geht, mit der Ebne macht, die durch die andern drei gelegt wird.

Auflösung. Sind die zehn Distanzen der Puncte O, A, B, C, K gegeben, und soll der Winkel gefunden werden, den OK oder r_0 mit der Ebne ABC oder $\triangle_0$ macht, so kennt man die Normalen $h_0 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{\triangle_0}$ und $d_0 = \frac{3\,t_0}{\triangle_0}$. Der gesuchte Winkel ist aber offenbar das Complement des Winkels, den r_0 mit h_0 macht, und es ist

$$\cos(r_0, h_0) = \sin(r_0, \triangle_0) = \frac{h_0 - d_0}{r_0} = \frac{3(\mathfrak{T} - t_0)}{r_0 \triangle_0}, \quad (344.)$$

worin $\triangle_0$, $\mathfrak{T}_0$ und t_0 nach 266. 267 zu ersetzen sind.

Man kann auch — jedoch nicht kürzer — auf tetraedrometrischem Wege zu diesem Resultate gelangen:

Sind $\overset{1}{P}_0$, $\overset{2}{P}_0$, $\overset{3}{P}_0$ die P-sinus der Ecken $r_0 p q$, $r_0 u q$, $r_0 u p$, so ist nach dem Satze D. a (§. 48) oder Formel 50:

$$P_0 \cos(h_0 r_0) = \overset{1}{P}_0 \cos(h_0 u) + \overset{2}{P}_0 \cos(h_0 p) + \overset{3}{P}_0 \cos(h_0 q)$$

$$= \overset{1}{P}_0 \sin H_1 + \overset{2}{P}_0 \sin H_2 + \overset{3}{P}_0 \sin H_3$$

$$\text{nach (308)} = \frac{3\,\mathfrak{T}}{\triangle_0}\left(\frac{\overset{1}{P}_0}{u} + \frac{\overset{2}{P}_0}{p} + \frac{\overset{3}{P}_0}{q}\right)$$

Nun ist aber $r_0 p q \overset{1}{P}_0 = 3\,t_1$, also

$$\frac{\overset{1}{P}_0}{u} = \frac{3\,t_1}{r_0 u p q}, \quad \frac{\overset{2}{P}_0}{p} = \frac{3\,t_2}{r_0 u p q}, \quad \frac{\overset{3}{P}_0}{q} = \frac{3\,t_3}{r_0 u p q}$$

und daher:

$$P_0 \cos(h_0 r_0) = \frac{3\,\mathfrak{T}(3\,t_1 + 3\,t_2 + 3\,t_3)}{\triangle_0 r_0 u p q}$$

also, da $upqP_0 = 3\mathfrak{T}$ ist,

$$\cos(h_0 r_0) = \sin(\triangle_0 r_0) = \frac{3\,t_1 + 3\,t_2 + 3\,t_3}{\triangle_0 r_0} \qquad (345.)$$

was mit 344 übereinstimmt, weil

$$\mathfrak{T} = t_0 + t_1 + t_2 + t_3.$$

§. 179.

Die drei folgenden Aufgaben XXVIII. XXIX. XXX enthalten die Hindeutungen darauf, dass die bisherigen Auflösungen weiter für Aufgaben über mehr als fünf Puncte und mehr als fünf Strahlen benutzt werden können. Sie geben keine neuen Auflösungen, sondern nur den Nachweis der Möglichkeit derselben vorzugsweise durch Benutzung der drei Ergebnisse: 1) dass, wenn von vier Puncten die Abstände gegeben sind, auch der Abstand eines jeden von der Ebne der drei andern nach 263 zu berechnen ist; 2) dass, wenn von fünf Puncten im Raume neun Abstände gegeben sind, der zehnte daraus nach 340 berechnet werden kann; 3) dass, wenn von vier Strahlen fünf Winkel gegeben sind, der fünfte daraus nach 34. a berechnet werden kann.

Da diese Nachweisungen für die Tetraedrometrie in unserem Sinne keine weiteren Aufklärungen geben, so können sie hier füglich übergangen werden.

§. 180.

Auch die folgende

Aufgabe XXXI: Alle Theile des Tetraeders in Werthen von 12 rechtwinkligen Coordinaten der vier Eckpuncte auszudrücken

hat für uns keine Bedeutung. — Ihre Auflösung besteht übrigens auch in dem Memoire nur in der Bemerkung, dass eine Gerade g, deren Endpuncte die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben, durch die Gleichung

$$g^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

ausgedrückt wird. Sind also von den Eckpuncten des Tetraeders und einem fünften Puncte die Coordinaten gegeben, so kann man nach dieser Formel sämmtliche Distanzen der fünf Puncte, also auch die durch diese Distanzen in den voraufgegangenen Aufgaben ausgedrückten Grössen durch diese Coordinaten ausdrücken.

Es ist also damit der Zusammenhang nachgewiesen, welcher zwischen dem Inhalte des „Mémoire“ und dem der Lagrange'schen „*Solutions analytiques etc.*“ besteht. Diese Schrift drückt alle am Tetraeder zu berechnenden Grössen in Coordinaten dreier Tetraeder-Eckpuncte in Beziehung auf den vierten als Anfangspunct aus. Feuerbach in seinem „Grundriss etc.“ und in dem dadurch angekündigten, leider noch bis jetzt Manuscript gebliebenen Werke hat dagegen die Tetraedergrössen ohne die von Lagrange gewählte Beschränkung durch die Coordinaten aller vier Eckpuncte ausgedrückt, und sich dadurch den Vortheil vorbehalten, über die Lage des Anfangspunctes in jedem Stadium der Rechnung verfügen zu können. Dabei hat er mit der Methode der Coordinaten die Methode der Projectionen fruchtbar verbunden, und aus beiden eine neue, ihm eigenthümliche „Methode der coordinirten Coefficienten“ hergeleitet. — Alle diese trefflichen Ausführungen haben jedoch zu unserer „Tetraedrometrie“ keine wesentliche Beziehung, und sind daher hier nicht weiter zu besprechen.

§. 181.

Die letzte Carnot'sche Aufgabe XXXII behandelt die Umformung der Coordinaten im Raume aus einem schiefwinkligen Systeme in ein anderes, welche in unserm neunten Capitel durch Einführung der Eckensinus auf die einfachen Formeln 130 — 136 gebracht ist. Die Vergleichung dieser Formeln mit den Carnot'schen, so wie überhaupt mit allen bisher für diese Aufgabe aufgestellten, ist vielleicht mehr, als irgend ein anderer in diesem Buche abgehandelter Gegenstand geeignet, die Tetraedrometrie neben die Trigonometrie als eine selbständige, für die stereometrischen Rechnungen nothwendige Disciplin augenfällig hinzustellen. Dennoch erscheint es nicht zweckmässig, die Carnot'sche Auflösung dieser Aufgabe hier aufzunehmen, weil der Gegenstand seitdem von Anderen gründlicher und vollständiger behandelt ist, namentlich von Herrn Professor Grunert in „Klügel's math. Wörterb. Supplem. Art. „Coordinaten“ und neuerdings in einer Abhandlung des „Archiv für Math. und Phys.“ 1860. Bnd. XXXIV. pg. 121—248: „Die allgemeinsten Gesetze der Krystallographie, gegründet auf eine von neuen Gesichtspuncten aus-

gehende Theorie der geraden Linie im Raume und der Ebne für beliebige schief- oder rechtwinklige Coordinatensysteme“, weshalb für unsern Zweck nicht sowohl auf die Carnot'sche Darstellung der Aufgabe XXXII, als vielmehr auf alle bisherigen Bearbeitungen des Gegenstandes hinzuweisen ist.

§. 182.

Nach unserer Auffassung der Tetraedrometrie sind nun die Carnot'schen Aufgaben noch durch einige andere zu ergänzen, nämlich: 1) die Eckenfunctionen der Tetraeder-Ecken, 2) die Moduln des Tetraeders auszudrücken in Werthen der sechs Kanten, oder solcher Bestimmungsstücke, deren Ausdrücke in Werthen der Kanten bekannt sind.

Zunächst ist nach 11:

$$P_0 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{upq},\quad P_1 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{umn},\ \text{etc.} \qquad (346.)$$

Ferner: Bezeichnen wir

$$s_0 = \tfrac{1}{2}(l+m+n) \qquad s_2 = \tfrac{1}{2}(u+m+q)$$
$$s_1 = \tfrac{1}{2}(l+p+q) \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(u+p+n)$$

so folgt aus $\cos a_0 = \dfrac{p^2+q^2-l^2}{2\,pq}$:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a_0 = \frac{1+\cos a_0}{2} = \frac{(p+q)^2-l^2}{4\,pq} = \frac{s_1\,(s_1-l)}{pq}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a_0 = \frac{1-\cos a_0}{2} = \frac{l^2-(p-q)^2}{4\,pq} = \frac{(s_1-p)\,(s_1-q)}{pq}$$

u. s. w., also (vergl. §. 63)

$$C_0 = 2\cos\tfrac{1}{2}a_0\cos\tfrac{1}{2}b_0\cos\tfrac{1}{2}c_0$$
$$= \frac{\sqrt{((p+q)^2-l^2)\,((u+q)^2-m^2)\,((u+p)^2-n^2)}}{4\,upq}$$
$$= \frac{2\sqrt{s_1\,(s_1-l)\,s_2\,(s_2-m)\,s_3\,(s_3-n)}}{upq} \qquad (347.)$$

$$S_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}a_0\sin\tfrac{1}{2}b_0\sin\tfrac{1}{2}c_0$$
$$= \frac{\sqrt{(l^2-(p-q)^2)\,(m^2-(u-q)^2)\,(n^2-(u-p)^2)}}{4\,upq}$$
$$= \frac{2\sqrt{(s_1-p)\,(s_1-q)\,(s_2-u)\,(s_2-q)\,(s_3-u)\,(s_3-p)}}{upq} \qquad (348.)$$

Setzt man nun nach 346: $upq = \frac{3\mathfrak{T}}{P_0}$ und dann nach 68: $\frac{P_0}{C_0} = \sin\varepsilon_0$, $\frac{P_0}{S_0} = \operatorname{ctg}\varrho_0$, so wird

$$\sin\varepsilon_0 = \frac{3\mathfrak{T}}{2\sqrt{s_1(s_1-l)\,s_2(s_2-m)\,s_3(s_3-n)}} \tag{349.}$$

$$\operatorname{ctg}\varrho_0 = \frac{3\mathfrak{T}}{2\sqrt{(s_1-p)(s_1-q)(s_2-u)(s_2-q)(s_3-u)(s_3-p)}} \tag{350.}$$

Nach bekannter planimetrischer Formel ist das Product der Nenner der beiden letzten Ausdrücke gleich $4\triangle_1\triangle_2\triangle_3$ also (nach 68. b)

$$\Pi_0 = \operatorname{ctg}\varrho_0 \sin\varepsilon_0 = \frac{9\mathfrak{T}^2}{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \tag{351.}$$

was auch aus 186 hervorgeht. — Also ist

$$M_0 = \frac{P_0}{\Pi_0} = \frac{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3}{upq\cdot 3\mathfrak{T}} \tag{35.2}$$

Ferner ist

$$F_0 = \tfrac{1}{2}(1+\cos a_0+\cos b_0+\cos c_0)$$

$$= \frac{2upq+u(p^2+q^2-l^2)+p(u^2+q^2-m^2)+q(u^2+p^2-n^2)}{4upq} \tag{353.}$$

$$= \frac{(p+q)(u+q)(u+p)-ul^2-pm^2-qn^2}{4upq} \tag{353.*}$$

Ersetzt man darin wieder upq nach 317, so hat man

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_0 = \frac{F_0}{P_0} = \frac{(p+q)(u+q)(u+p)-(ul^2+pm^2+qn^2)}{4\cdot 3\mathfrak{T}} \tag{354.}$$

§. 183.

Um auch die noch übrigen Functionen der Tetraederecken aus der Reihe 68. a auszudrücken, nämlich Γ_0, Σ_0, $\Phi_0\operatorname{tg} r_0$, $\sin c_0$, gehen wir von den Formeln 316. 318 aus, indem wir der Kürze halber bezeichnen:

$$ul\sin(ul) = \square_1,\ pm\sin(pm) = \square_2,\ qn\sin(qn) = \square_3$$

Es ist also nach 316:

$$\cos\alpha = \frac{\triangle_2^2+\triangle_3^2-\frac{1}{4}\square_1^2}{2\triangle_2\triangle_3},\ \text{also}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{(\triangle_2+\triangle_3)^2 - \frac{1}{4}\square_1^2}{4\triangle_2\triangle_3}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{4}\square_1^2 - (\triangle_2-\triangle_3)^2}{4\triangle_2\triangle_3}$$

u. s. w., also

$$\Gamma_0 = \frac{\sqrt{\left\{\left((\triangle_2+\triangle_3)^2-\frac{1}{4}\square_1^2\right)\left((\triangle_1+\triangle_3)^2-\frac{1}{4}\square_2^2\right)\left((\triangle_1+\triangle_2)^2-\frac{1}{4}\square_3^2\right)\right\}}}{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \qquad (355.)$$

$$\Sigma_0 = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{4}\square_1^2-(\triangle_2-\triangle_3)^2\right)\left(\frac{1}{4}\square_2^2-(\triangle_1-\triangle_3)^2\right)\left(\frac{1}{4}\square_3^2-(\triangle_1-\triangle_2)^2\right)\right\}}}{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \qquad (356.)$$

Setzt man nach 186: $4\triangle_1\triangle_2\triangle_3 = \dfrac{9\mathfrak{T}^2}{\Pi_0}$ und dann nach 68:

$\dfrac{\Pi_0}{\Gamma_0} = \operatorname{tg} r_0$, $\quad \dfrac{\Pi_0}{\Sigma_0} = \sin e_0$, so wird

$$\operatorname{tg} r_0 = \frac{9\mathfrak{T}^2}{\sqrt{\left\{\left((\triangle_2+\triangle_3)^2-\frac{1}{4}\square_1^2\right)\left((\triangle_1+\triangle_3)^2-\frac{1}{4}\square_2^2\right)\left((\triangle_1+\triangle_2)^2-\frac{1}{4}\square_3^2\right)\right\}}} \qquad (357.)$$

$$\sin e_0 = \frac{9\mathfrak{T}^2}{\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{4}\square_1^2-(\triangle_2-\triangle_3)^2\right)\left(\frac{1}{4}\square_2^2-(\triangle_1-\triangle_3)^2\right)\left(\frac{1}{4}\square_3^2-(\triangle_1-\triangle_2)^2\right)\right\}}} \qquad (358.)$$

Das Product der beiden Nenner ist nach 318 gleich $upq\,.\,(3\mathfrak{T})^3$, also ist

$$\operatorname{tg} r \sin e = \frac{3\mathfrak{T}}{upq} = P_0, \quad \text{was mit 61. a übereinstimmt.}$$

Endlich ist

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)$$

$$= \frac{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3 - \triangle_1(\triangle_2^2+\triangle_3^2-\frac{1}{4}\square_1^2) - \triangle_2(\triangle_1^2+\triangle_3^2-\square_2^2) - \triangle_3(\triangle_1^2+\triangle_2^2-\square_3^2)}{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \qquad (359.)$$

Ersetzt man darin wieder $4\triangle_1\triangle_2\triangle_3$ nach 186, so hat man:

$$\operatorname{ctg} e_0 = \frac{\Phi_0}{\Pi_0} =$$

$$= \frac{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3 - \triangle_1(\triangle_2^2+\triangle_3^2-\frac{1}{4}\square_1^2) - \triangle_2(\triangle_1^2+\triangle_3^2-\frac{1}{4}\square_2^2) - \triangle_3(\triangle_1^2-\triangle_2^2-\frac{1}{4}\square_3^2)}{9\mathfrak{T}^2} \qquad (360.)$$

Bei den Formeln dieses § hat man sich zu erinnern, dass sowohl die $\triangle$, als die $\square$ durch die Tetraederkanten ausgedrückt sind.

§. 184.

Die Moduln des Tetraeders durch die Kanten auszudrücken, oder durch solche Tetraeder-Elemente, deren Ausdrücke in Werthen der Kanten bekannt sind.

Der in den §§. 142—144 behandelte Modulus $3\mathfrak{T}$ ist von da ab schon vielfach als bekannt benutzt worden. Ebenso sind die $\triangle$ als bekannt vorausgesetzt.

Man hat nun nach dem unter 351 angegebenen Werthe von Π_0:

$$\mathfrak{M} = \frac{\triangle_0}{\Pi_0} = \frac{4\,\triangle_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3}{9\,\mathfrak{T}^2} \tag{361.}$$

$$2w = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{(3\mathfrak{T})^3}{4\,\triangle_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \tag{362.}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{lmn}{P_0}\ (208) = \frac{lmnupq}{3\mathfrak{T}} \tag{363.}$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{M}}\ (210) = \frac{lmnupq\cdot 3\mathfrak{T}}{8\,\triangle_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \tag{364.}$$

$$\sqrt{(P_0)} = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{D}}\ (210) = \frac{9\,\mathfrak{T}^2}{lmnupq} \tag{365.}$$

$$(h_0) = 4\cdot 3\mathfrak{T}\cdot 2w\,(198) = \frac{(3\mathfrak{T})^4}{\triangle_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \tag{366.}$$

Fünfzehntes Capitel.

Gemeinsame Form vieler tetraedrischer Gleichungen.

§. 185.

Unter den im elften Capitel aufgeführten und bezeichneten Bestimmungsgrössen des Tetraeders ist eine Anzahl solcher, die in der Vierzahl, und eine Anzahl solcher, die in der Sechszahl am Tetraeder sich vorfinden. Die ersteren, wie $\overline{\overline{P}}_0$, $\overline{\overline{P}}_1$, $\overline{\overline{P}}_2$, $\overline{\overline{P}}_3$ oder d_0, d_1, d_2, d_3 u. s. w. haben allemal einerlei Beziehung zu den vier Ecken oder deren Gegenflächen und sind daher je mit einerlei Buchstaben, dem der Index der zugehörigen Ecke oder Fläche angehängt ist, bezeichnet. Von den letzteren, wie a, b, c, a', b', c' oder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{c}'$, oder die zusammengesetzten $l \sin \alpha'$, $m \sin \beta'$, $n \sin \gamma'$, $u \sin \alpha$, $p \sin \beta$, $q \sin \gamma$ (in §. 146) zerfällt jedes System in zwei Halbsysteme, deren eines drei Elemente umfasst, welche einerlei Beziehung zu solchen drei Kanten haben, wie l, m, n, welche die Seiten eines Tetraederdreiecks ($\triangle_0$) sind, die drei andern aber dieselbe Beziehung zu drei Kanten, wie u, p, q, welche die Kanten einer Ecke sind.

Durch dieses Verhalten der theils vierzähligen, theils sechszähligen Elemente werden gewisse häufig wiederkehrende Formen von Gleichungen, die zwischen diesen Elementen stattfinden, bedingt, deren algebraische Behandlung durch die besondere Natur des Tetraeders auf gewisse Kunstgriffe zurückgeführt werden kann. Diese Behandlung, insofern sie eben nur bei Gleichungen, die sich auf das Tetraeder beziehen, anwendbar ist, gehört specifisch der Tetraedrometrie an, und nimmt darin ein eignes Capitel mit Recht in Anspruch.

§. 186.

Wir haben diese Kunstgriffe schon in §. 146 auf die Gleichung

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1\,u\sin\alpha + d_2\,p\sin\beta + d_3\,q\sin\gamma \qquad (270.)$$

angewandt, und es kommt nur darauf an, das dort befolgte Verfahren zu generalisiren. In dieser Gleichung ist das links stehende Glied $4\,\Pi_0 r^2$ einem vierzähligen System von Bestimmungsgrössen angehörig. In dem rechts stehenden Ausdruck sind die Factoren d_1, d_2, d_3 Elemente eines andern vierzähligen Systems; die Factoren $u\sin\alpha$, $p\sin\beta$, $q\sin\gamma$ dagegen bilden ein Halbsystem, das einem sechszähligen Systeme angehört. Bezeichnen wir also mit φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, und mit ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Elemente zweier vierzähligen Systeme von Tetraeder-Elementen, mit $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die Elemente eines sechszähligen Systemes, so hat die Gleichung 270 die generalisirte Form:

I. $$\varphi_0 = \psi_1\,\mathfrak{o} + \psi_2\,\mathfrak{p} + \psi_3\,\mathfrak{q}$$

Besteht aber diese Gleichung zwischen sieben derartigen Elementen des Tetraeders, so bestehen auch noch drei andere zwischen je sieben Elementen derselben Arten, und wir haben dann jedesmal vier Gleichungen, von denen die drei anderen durch Verwechselung der Ecken gefunden werden. Es bestehen dann nämlich die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \psi_1\,\mathfrak{o} + \psi_2\,\mathfrak{p} + \psi_3\,\mathfrak{q} \\
\varphi_1 &= \psi_0\,\mathfrak{o} + \psi_2\,\mathfrak{n} + \psi_3\,\mathfrak{m} \\
\varphi_2 &= \psi_0\,\mathfrak{p} + \psi_1\,\mathfrak{n} + \psi_3\,\mathfrak{l} \\
\varphi_3 &= \psi_0\,\mathfrak{q} + \psi_1\,\mathfrak{m} + \psi_2\,\mathfrak{l}
\end{aligned} \qquad (367.)$$

worin die Elemente von zwei vierzähligen und einem sechszähligen Systeme verbunden sind. Die Combinationen dieser vier Gleichungen, durch welche man auch je drei der 14 Glieder eliminiren kann, ergeben dann jedesmal eine Reihe von Lehrsätzen, deren allgemeine Formen wir jetzt kennen lernen wollen.

§. 187.

Multiplicirt man die Gleichungen 367 der Reihe nach mit ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, so ergiebt die Addition, resp. Subtraction:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\varphi_0\psi_0 + \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) = {} & \psi_0\psi_1\,\mathfrak{o} + \psi_0\psi_2\,\mathfrak{p} + \psi_0\psi_3\,\mathfrak{q} \\
& + \psi_2\psi_3\,\mathfrak{l} + \psi_1\psi_3\,\mathfrak{m} + \psi_1\psi_2\,\mathfrak{n}
\end{aligned} \qquad (368.)$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(-\varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3) &= \psi_2\psi_3\mathfrak{l}+\psi_1\psi_3\mathfrak{m}+\psi_1\psi_2\mathfrak{n}\\
\tfrac{1}{2}(\ \varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3) &= \psi_2\psi_3\mathfrak{l}+\psi_0\psi_2\mathfrak{p}+\psi_0\psi_3\mathfrak{q}\\
\tfrac{1}{2}(\ \varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3) &= \psi_0\psi_1\mathfrak{o}+\psi_1\psi_3\mathfrak{m}+\psi_0\psi_3\mathfrak{q}\\
\tfrac{1}{2}(\ \varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3) &= \psi_0\psi_1\mathfrak{o}+\psi_0\psi_2\mathfrak{p}+\psi_1\psi_2\mathfrak{n}
\end{aligned} \qquad (369.)$$

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3) = \psi_0\psi_1\mathfrak{o}-\psi_2\psi_3\mathfrak{l} \qquad (370.)$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3) &= \psi_0\psi_2\mathfrak{p}-\psi_1\psi_3\mathfrak{m}\\
\tfrac{1}{2}(\varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3) &= \psi_0\psi_3\mathfrak{q}-\psi_1\psi_2\mathfrak{n}
\end{aligned}$$

§. 188.

Um die Gleichungen 367 in Beziehung auf die ψ aufzulösen, also ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 durch die φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ auszudrücken, multiplicire man die drei letzten der Reihe nach mit $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, und bilde:

$$-\varphi_1\mathfrak{l}+\varphi_2\mathfrak{m}+\varphi_3\mathfrak{n} = \psi_0(-\mathfrak{lo}+\mathfrak{mp}+\mathfrak{nq})+2\psi_1\mathfrak{mn}$$

oder, wenn man der Kürze halber setzt:

$$\begin{aligned}
-\mathfrak{lo}+\mathfrak{mp}+\mathfrak{nq} &= \mathfrak{X}\\
\mathfrak{lo}-\mathfrak{mp}+\mathfrak{nq} &= \mathfrak{Y}\\
\mathfrak{lo}+\mathfrak{mp}-\mathfrak{nq} &= \mathfrak{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\varphi_1\mathfrak{l}+\varphi_2\mathfrak{m}+\varphi_3\mathfrak{n} &= \psi_0\mathfrak{X}+2\psi_1\mathfrak{mn} \qquad (371.)\\
\varphi_1\mathfrak{l}-\varphi_2\mathfrak{m}+\varphi_3\mathfrak{n} &= \psi_0\mathfrak{Y}+2\psi_2\mathfrak{ln}\\
\varphi_1\mathfrak{l}+\varphi_2\mathfrak{m}-\varphi_3\mathfrak{n} &= \psi_0\mathfrak{Z}+2\psi_3\mathfrak{lm}
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{lo}$, $\mathfrak{mp}$, $\mathfrak{nq}$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite die erste der Gleichungen 367 in Anwendung bringt, durch Addition:

$$\varphi_1\mathfrak{l}\mathfrak{X}+\varphi_2\mathfrak{m}\mathfrak{Y}+\varphi_3\mathfrak{n}\mathfrak{Z} = \psi_0(\mathfrak{lo}\mathfrak{X}+\mathfrak{mpo}\mathfrak{Y}+\mathfrak{nq}\mathfrak{Z})+2\varphi_0\mathfrak{lmn}$$

oder, wenn man bezeichnet

$$\mathfrak{lo}\mathfrak{X}+\mathfrak{mp}\mathfrak{Y}+\mathfrak{nq}\mathfrak{Z} = \mathfrak{U},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}\psi_0 &= -2\mathfrak{lmn}\varphi_0+\mathfrak{l}\mathfrak{X}\varphi_1+\mathfrak{m}\mathfrak{Y}\varphi_2+\mathfrak{n}\mathfrak{Z}\varphi_3 \qquad (372.)\\
\mathfrak{U}\psi_1 &= \mathfrak{l}\mathfrak{X}\varphi_0-2\mathfrak{lpq}\varphi_1+\mathfrak{q}\mathfrak{Z}\varphi_2+\mathfrak{p}\mathfrak{Y}\varphi_3\\
\mathfrak{U}\psi_2 &= \mathfrak{m}\mathfrak{Y}\varphi_0+\mathfrak{q}\mathfrak{Z}\varphi_1-2\mathfrak{omq}\varphi_2+\mathfrak{o}\mathfrak{X}\varphi_3\\
\mathfrak{U}\psi_3 &= \mathfrak{n}\mathfrak{Z}\varphi_0+\mathfrak{p}\mathfrak{Y}\varphi_1+\mathfrak{o}\mathfrak{X}\varphi_2-2\mathfrak{opn}\varphi_3
\end{aligned}$$

von welchen Gleichungen die drei letzten der ersten nachgebildet sind.

Hier sehen wir nun, warum man in tetraedrischen Rechnungen so häufig auf Grössen stösst, die nach den Formen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{U}$ zusammengesetzt sind, worauf schon in §. 30 und in §. 146

Anm. hingewiesen worden ist. — Für Grössen dieser Formen finden gewisse Relationen statt, welche hier eingeschaltet werden mögen.

§. 189.

Es seien $a, b,$ c drei beliebige Zahlen und

$$X = -a + b + c$$
$$Y = a - b + c$$
$$Z = a + b - c$$
$$U = aX + bY + cZ$$
$$= 2bc + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2 \quad (373.)$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad (374.)$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

so ist

$$Y + Z = 2a \quad (375.)$$
$$X + Z = 2b$$
$$X + Y = 2c$$

also

$$U = \tfrac{1}{2}\{(Y+Z)X + (Y+Z)Y + (X+Y)Z\}$$
$$= YZ + XZ + XY \quad (376.)$$
$$YZ = -aX + bY + cZ = (a+b-c)(a-b+c) \quad (377.)$$
$$XZ = aX - bY + cZ = (a+b-c)(-a+b+c)$$
$$YZ = aX + bY - cZ = (a-b+c)(-a+b+c)$$
$$U - YZ = X(Y+Z) = 2aX \quad (378.)$$
$$U - XZ = Y(X+Z) = 2bY$$
$$U - XY = Z(X+Y) = 2cZ$$
$$U + X^2 = (X+Y)(X+Z) = 4bc \quad (379.)$$
$$U + Y^2 = (X+Y)(Y+Z) = 4ac$$
$$U + Z^2 = (X+Z)(Y+Z) = 4ab$$

§. 190.

Werden die Gleichungen 373 der Reihe nach mit φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 multiplicirt, so ergiebt ihre Addition, resp. Subtraction:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\varphi_0\psi_0 + \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) = \varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}\mathfrak{X} + \varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}\mathfrak{Y} + \varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}\mathfrak{Z}$$
$$+ \varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o}\mathfrak{X} + \varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p}\mathfrak{Y} + \varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q}\mathfrak{Z}$$
$$- \mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2 - \mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2 - \mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2 - \mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2 \quad (380.)$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(-\varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)=\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{X}+\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{Y}+\varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{Z}$$
$$+\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2-\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2-\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2-\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2 \qquad (381.)$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\ \varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)=\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{X}+\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{Y}+\varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{Z}$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2+\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2-\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2-\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\ \varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)=\varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{X}+\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{Y}+\varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{Z}$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2-\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2+\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2-\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\ \varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3)=\varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{X}+\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{Y}+\varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{Z}$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2-\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2-\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2+\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\varphi_0\psi_0+\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3)=(\varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}-\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o})\,\mathfrak{X} \qquad (382.)$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2-\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2+\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2+\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3)=(\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}-\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p})\,\mathfrak{Y}$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2+\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2-\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2+\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\varphi_0\psi_0-\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)=(\varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}-\varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{Z}$$
$$-\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varphi_0^2+\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\varphi_1^2+\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}\varphi_2^2-\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}\varphi_3^2$$

§. 191.

Die Zusammenhaltung dieser Gleichungen mit denen des §. 187 ergiebt endlich noch die folgenden:

$$\left.\begin{matrix}\psi_0\psi_1\,\mathfrak{o}+\psi_0\psi_2\,\mathfrak{p}+\psi_0\psi_3\,\mathfrak{q}\\ +\psi_2\psi_3\,\mathfrak{l}+\psi_1\psi_3\,\mathfrak{m}+\psi_1\psi_2\,\mathfrak{n}\end{matrix}\right\}\mathfrak{U}=\begin{matrix}\varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{X}+\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{Y}+\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{Z}\\ +\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{X}+\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{Y}+\varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{Z}\end{matrix} \qquad (383.)$$

$$\{\psi_2\psi_3\,\mathfrak{l}+\psi_1\psi_3\,\mathfrak{m}+\psi_1\psi_2\,\mathfrak{n}\}\mathfrak{U}=\begin{matrix}(\varphi_0\varphi_1\,\mathfrak{l}+\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o})\,\mathfrak{X}\\ +(\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}+\varphi_1\varphi_3\,\mathfrak{p})\,\mathfrak{Y}\\ +(\varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}+\varphi_1\varphi_2\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{Z}\\ -\varphi_0^2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}-\varphi_1^2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}-\varphi_2^2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}-\varphi_3^2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{n}\end{matrix} \qquad (384.)$$

$$\{\psi_2\psi_3\,\mathfrak{l}+\psi_0\psi_2\,\mathfrak{p}+\psi_0\psi_3\,\mathfrak{q}\}\mathfrak{U}=\begin{matrix}\varphi_2\varphi_3\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{X}+\varphi_0\varphi_2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{Y}+\varphi_0\varphi_3\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{Z}\\ -\varphi_0^2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}+\varphi_1^2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}-\varphi_2^2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}-\varphi_3^2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{n}\end{matrix}$$

$$\{\psi_0\psi_1\mathfrak{o}+\psi_1\psi_3\mathfrak{m}+\psi_0\psi_3\mathfrak{q}\}\mathfrak{U}= \varphi_0\varphi_1\mathfrak{l}\mathfrak{X}+\varphi_1\varphi_3\mathfrak{p}\mathfrak{Y}+\varphi_0\varphi_3\mathfrak{n}\mathfrak{Z} -\varphi_0^2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}-\varphi_1^2\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\varphi_2^2\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}-\varphi_3^2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$$

$$\{\psi_0\psi_1\mathfrak{o}+\psi_0\psi_2\mathfrak{p}+\psi_1\psi_2\mathfrak{n}\}\mathfrak{U}= \varphi_0\varphi_1\mathfrak{l}\mathfrak{X}+\varphi_0\varphi_2\mathfrak{m}\mathfrak{Y}+\varphi_1\varphi_2\mathfrak{q}\mathfrak{Z} -\varphi_0^2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}-\varphi_1^2\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}-\varphi_2^2\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}+\varphi_3^2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$$

$$\{\psi_0\psi_1\mathfrak{o}-\psi_2\psi_3\mathfrak{l}\}\mathfrak{U}=(\varphi_0\varphi_1\mathfrak{l}-\varphi_2\varphi_3\mathfrak{o})\mathfrak{X} -\varphi_0^2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}-\varphi_1^2\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\varphi_2^2\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}+\varphi_3^2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n} \qquad (385.)$$

$$\{\psi_0\psi_2\mathfrak{p}-\psi_1\psi_3\mathfrak{m}\}\mathfrak{U}=(\varphi_0\varphi_2\mathfrak{m}-\varphi_1\varphi_3\mathfrak{p})\mathfrak{Y} -\varphi_0^2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}+\varphi_1^2\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}-\varphi_2^2\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}+\varphi_3^2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$$

$$\{\psi_0\psi_3\mathfrak{q}-\psi_1\psi_2\mathfrak{n}\}\mathfrak{U}=(\varphi_0\varphi_3\mathfrak{n}-\varphi_1\varphi_2\mathfrak{q})\mathfrak{Z} -\varphi_0^2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}+\varphi_1^2\mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\varphi_2^2\mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q}-\varphi_3^2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$$

§. 192.

Alle diese Gleichungen folgen aus der einen:

I. $$\varphi_0=\psi_1\mathfrak{o}+\psi_2\mathfrak{p}+\psi_3\mathfrak{q}$$

d. h. sie finden statt, wenn ein vierzähliges, auf eine Ecke O bezügliches Tetraeder-Element ausgedrückt ist durch die Summe der Producte aus je einem von drei auf die drei andern Ecken (A, B, C) bezüglichen vierzähligen Elementen und einem von drei sechszähligen, auf die drei Kanten (u, p, q), welche in jener ersten Ecke zusammenstossen, bezüglichen Elemente $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$

Ist nun aber eine Gleichung von der Form

II. $$\varphi_0=\psi_1\mathfrak{l}+\psi_2\mathfrak{m}+\psi_3\mathfrak{n}$$

gegeben, so ist klar, dass drei Elemente $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$, welche zu den drei Kanten l, m, n einerlei Beziehung haben, auch zu deren drei Gegenkanten u, p, q einerlei (wenn auch eine andere) Beziehung haben, und daher auch mit $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ bezeichnet werden können, wenn nur die ursprünglich mit $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ bezeichneten nun $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ geschrieben werden. Mit anderen Worten:

Ist eine Gleichung der zweiten Form gegeben, so kann man die $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ auch durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ bezeichnen und umgekehrt, worauf dann die sämmtlichen Gleichungen 367 — 385 stattfinden, oder man kann in allen die $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ vertauschen.

§. 193.

Als Beispiel der Anwendung möge die in §. 146 benutzte Gleichung 270 dienen:

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1 u \sin\alpha + d_2 p \sin\beta + d_3 q \sin\gamma \qquad (270.)$$

welche für den Mittelpunct der dem Tetraeder umschriebenen Kugel gilt. Es sollen auch hier die in den Gleichungen 272, 273, 281 gebrauchten Abkürzungszeichen benutzt werden, wozu noch die folgenden kommen

$$\overline{U} = v\lambda\overline{X} + \pi\mu\overline{Y} + \varkappa\nu\overline{Z}$$

$$\overset{8}{U} - u^2 l^2 \overset{4}{X} + p^2 m^2 \overset{4}{Y} + q^2 n^2 \overset{4}{Z}$$

so dass nach 280 ist:

$$\mathfrak{M}^2\,\overline{U} = \overset{8}{U} \qquad (386.)$$

Aus der Gleichung

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1 v + d_2 \pi + d_3 \varkappa \qquad (270.)$$

folgt also nach 368 — 370:

$$2r^2(\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3 = \quad d_0 d_1 v + d_0 d_2 \pi + d_0 d_3 \varkappa$$
$$\text{nach } 181 \quad = 4r^2 w \quad + d_2 d_3 \lambda + d_1 d_3 \mu + d_1 d_2 \nu \qquad (387.)$$

$$2r^2(-\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3) = d_2 d_3 \lambda + d_1 d_3 \mu + d_1 d_2 \nu$$
$$= 4r^2(w - \Pi_0 d_0) \qquad (388.)$$

$$2r^2(\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 - \Pi_2 d_2 - \Pi_3 d_3) = d_0 d_1 v - d_2 d_3 \lambda \qquad (389.)$$

Nach 372 folgt ferner:

$$\overline{U} d_0 = 4r^2(-2\,\Pi_0 \lambda\mu\nu + \Pi_1 \lambda\overline{X} + \Pi_2 \mu\overline{Y} + \Pi_3 \nu\overline{Z}) \qquad (274.)$$

welche Gleichung wir schon unter Nr. 274 in §. 146 kennen gelernt haben.

In diesem §. 146 ist, um aus (274) r durch die Kanten auszudrücken, eine zweite Gleichung (271) zu Hülfe genommen. Das dort gefundene Resultat kann aber auch ohne diese allein aus 270 gefunden werden. Denn es ist nach 380 — 382:

$$\tfrac{1}{2}\overline{U} \cdot 4r^2(\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3) = \overline{U} \cdot 4r^2 \cdot w$$

$$= 16\,r^4 \left\{ \begin{array}{l} \Pi_0 \Pi_1 \lambda \Big| \overline{X} + \Pi_0 \Pi_2 \mu \Big| \overline{Y} + \Pi_0 \Pi_3 \nu \Big| \overline{Z} \\ + \Pi_2 \Pi_3 \nu \Big| \quad + \Pi_1 \Pi_3 \pi \Big| \quad + \Pi_1 \Pi_2 \varkappa \Big| \\ - \Pi_0^2 \lambda\mu\nu - \Pi_1^2 \lambda\pi\varkappa - \Pi_2^2 \nu\mu\varkappa - \Pi_3^2 \nu\pi\nu \end{array} \right\} (390.)$$

$$\tfrac{1}{2}\overline{U}(-\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3) = \overline{U}(w - \Pi_0 d_0)$$
$$= 4r^2 \left\{ \begin{array}{l} \Pi_2\,\Pi_2 \upsilon\,\overline{X} + \Pi_1\,\Pi_3 \pi\,\overline{Y} + \Pi_1\,\Pi_2 \varkappa \\ + \Pi_0^2 \lambda\mu\nu - \Pi_1^2 \lambda\pi\varkappa - \Pi_2^2 \upsilon\mu\varkappa - \Pi_3^2 \upsilon\pi\nu \end{array} \right\} \quad (391.)$$

$$\tfrac{1}{2}\overline{U}(\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 - \Pi_2 d_2 - \Pi_3 d_3)$$
$$= 4r_2 \left\{ \begin{array}{l} (\Pi_0\,\Pi_1 \lambda - \Pi_2\,\Pi_3 \upsilon)\,\overline{X} \\ -\Pi_0^2 \lambda\mu\nu - \Pi_1^2 \lambda\pi\varkappa + \Pi_2^2 \upsilon\mu\varkappa + \Pi_3^2 \upsilon\pi\nu \end{array} \right\} \quad (392.)$$

Nun ist aber nach 260: $\Pi_0\,\Pi_1\,\lambda = \dfrac{w}{\mathfrak{M}}\,l^2$ u. s. w.

$$\Pi_2\,\Pi_3\,\upsilon = \frac{w}{\mathfrak{M}}\,u^2 \text{ u. s. w.}$$

ferner $\Pi_0^2 \lambda\mu\nu = \dfrac{w}{\mathfrak{M}} \cdot \dfrac{l^2 m^2 n^2}{\mathfrak{M}}$ u. s. w.

also wird die Gleichung 390, wenn man sie durch $w \cdot 4r^2$ dividirt:

$$\overline{U} = \frac{4r^2}{\mathfrak{M}} \left\{ \begin{array}{l} (l^2+u^2)\,\overline{X} + (m^2+p^2)\,\overline{Y} + (n^2+q^2)\,\overline{Z} \\ -\dfrac{l^2m^2n^2 + l^2p^2q^2 + u^2m^2q^2 + u^2p^2n^2}{\mathfrak{M}} \end{array} \right\} \quad (393.)$$

also, wenn man diese Gleichung mit $\mathfrak{M}^2$ multiplicirt, nach 386 und 281:

$$\overset{8}{U} = 4r^2 \left\{ \begin{array}{l} (l^2+u^2)\,\overset{4}{X} + (m^2+p^2)\,\overset{4}{Y} + (n^2+q^2)\,\overset{4}{Z} \\ -l^2m^2n^2 - l^2p^2q^2 - u^2m^2q^2 - u^2p^2n^2 \end{array} \right\}$$

d. h. nach 267:

$$\overset{8}{U} = 4r^2 \cdot 16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 \quad (284.)$$

welches die Gleichung 284 ist.

§. 194.

Im dreizehnten Capitel haben wir zwei Reihen von vierzähligen Tetraederfunctionen kennen gelernt, deren jede ausgedrückt ist durch die Producte aus je einer der drei andern von derselben Art in den Cosinus eines sechszähligen Winkels. Die Gleichungen 242. 243, welche dieses Verhalten ausdrücken, können wir zusammenfassen in der allgemeinen Form

$$\mp \varphi_0 = \varphi_1 \mathfrak{l} + \varphi_2 \mathfrak{m} + \varphi_3 \mathfrak{n} \quad (394.)$$

worin das obere Vorzeichen für die in §. 136. 137 mit f, das untere für die mit φ bezeichneten Functionen gilt.

Aus dieser Gleichung folgt nun für die f und die φ nach 368:

$$\mp\tfrac{1}{2}(\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)=\varphi_0\varphi_1\mathfrak{l}+\varphi_0\varphi_2\mathfrak{m}+\varphi_0\varphi_3\mathfrak{n}+\varphi_2\varphi_3\mathfrak{o}+\varphi_1\varphi_3\mathfrak{p}+\varphi_1\varphi_2\mathfrak{q} \quad (395.)$$

nach 369:

$$\mp\tfrac{1}{2}(-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)=\varphi_2\varphi_3\mathfrak{o}+\varphi_1\varphi_3\mathfrak{p}+\varphi_1\varphi_2\mathfrak{q} \quad (396.)$$

nebst drei anderen;

nach 370:

$$\mp\tfrac{1}{2}(\varphi_0^2+\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)=\varphi_0\varphi_1\mathfrak{l}-\varphi_2\varphi_3\mathfrak{o} \quad (397.)$$

nebst zwei andern.

Diese beiden Gleichungen 396. 397 angewandt auf die P-sinus der Ecken und die Cosinus der Seitenwinkel eines vierstrahligen Eckensystems, so wie auf die Π-sinus der Ecken und die Cosinus der Flächenwinkel eines vierebnigen Eckensystems, geben die Formeln 28. a. b und 31. a. b des ersten Theils.

Nach 372:

$$(\mp\mathfrak{U}+2\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{q})\varphi_0=\varphi_1\mathfrak{o}\mathfrak{X}+\varphi_2\mathfrak{p}\mathfrak{Y}+\varphi_3\mathfrak{q}\mathfrak{Z} \quad (398.)$$

nebst drei andern.

Die aus §. 190 und §. 191 durch Einführung der Bedingung $\varphi=\pm\psi$ herzuleitenden Gleichungen führe ich hier nicht mit auf, da ich vorläufig noch keine Anwendung davon kenne.

§. 195.

Eine andere Entwickelung bietet noch die Gleichung

$$\mp\varphi_0=\mathfrak{o}\psi_1+\mathfrak{p}\psi_2+\mathfrak{q}\psi_3 \quad (394.)$$

wenn man sie dem in §. 27 eingeschlagenen Verfahren unterzieht, indem man setzt

$$\varphi_0=\pm v_0\psi_0,\ \varphi_1=\pm v_1\psi_1,\ \varphi_2=\pm v_2\psi_2,\ \varphi_3=\pm v_3\psi_3$$

wodurch die vier Gleichungen 394 diese Form bekommen:

$$\begin{aligned}0&=v_0\psi_0+\mathfrak{o}\psi_1+\mathfrak{p}\psi_2+\mathfrak{q}\psi_3\\0&=\mathfrak{o}\psi_0+v_1\psi_1+\mathfrak{n}\psi_2+\mathfrak{m}\psi_3\\0&=\mathfrak{p}\psi_0+\mathfrak{n}\psi_1+v_2\psi_2+\mathfrak{l}\psi_3\\0&=\mathfrak{q}\psi_0+\mathfrak{m}\psi_1+\mathfrak{l}\psi_2+v_3\psi_3\end{aligned} \quad (399.)$$

Eliminirt man daraus ψ_1, ψ_2, ψ_3, wodurch offenbar ψ_0 mit verschwinden muss, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} v_0 (v_1 v_2 v_3 - v_1 \mathfrak{l}^2 - v_2 \mathfrak{m}^2 - v_3 \mathfrak{n}^2 + 2 \mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n} \qquad & (400.) \\ = \mathfrak{U} + v_2 v_3 \mathfrak{o}^2 + v_1 v_3 \mathfrak{p}^2 + v_1 v_2 \mathfrak{q}^2 - 2 v_1 \mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q} & \\ - 2 v_2 \mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q} - 2 v_3 \mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n} & \\ = \mathfrak{U} + v_2 v_3 \mathfrak{o}^2 - 2 v_1 \mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q} & \\ + v_1 v_3 \mathfrak{p}^2 - 2 v_2 \mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q} & \\ + v_1 v_2 \mathfrak{q}^2 - 2 v_3 \mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n} & \end{aligned}$$

welche die vier Quotienten je zweier von den vierzähligen Elementen mit den sechs sechszähligen verbindet.

Wenn man nach dieser Gleichung durch Verwechselung der Ecken die drei entsprechenden bildet, so werden diese mit derselben identisch, was auch ohne den Versuch leicht erkannt wird, theils aus der Natur der Sache, theils aus der vorliegenden Gleichung, wenn man ihr die Form giebt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = v_0 v_1 v_2 v_3 - v_0 v_1 \mathfrak{l}^2 - v_2 v_3 \mathfrak{o}^2 + 2 v_1 \mathfrak{l}\mathfrak{p}\mathfrak{q} \qquad & (401.) \\ - v_0 v_2 \mathfrak{m}^2 - v_1 v_3 \mathfrak{p}^2 + 2 v_2 \mathfrak{o}\mathfrak{m}\mathfrak{q} & \\ - v_0 v_3 \mathfrak{n}^2 - v_1 v_2 \mathfrak{q}^2 + 2 v_3 \mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{n} & \\ + 2 v_0 \mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n} & \end{aligned}$$

§. 196.

In diesen Gleichungen sind unter andern auch die Gleichungen 34. a. b oder 37. a. b als besondere enthalten. Denn setzen wir in 399:

$$\psi_0 = P_0,\ \psi_1 = P_1,\ \psi_2 = P_2,\ \psi_3 = P_3$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} &= \cos a' \quad \text{also} \quad \mathfrak{l} = \cos a \\ \mathfrak{p} &= \cos b' \qquad\quad \mathfrak{m} = \cos b \\ \mathfrak{q} &= \cos c' \qquad\quad \mathfrak{n} = \cos c \end{aligned}$$

$$\text{und } v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 1,$$

so gehen die Gleichungen 399 in 20. a über; in der Gleichung 400 wird der Factor

$$\begin{aligned} v_1 v_2 v_3 - v_1 \mathfrak{l}^2 - v_2 \mathfrak{m}^2 - v_3 \mathfrak{n}^2 + 2 \mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n} & \\ = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c & \\ = 4 P_0^2 & \end{aligned}$$

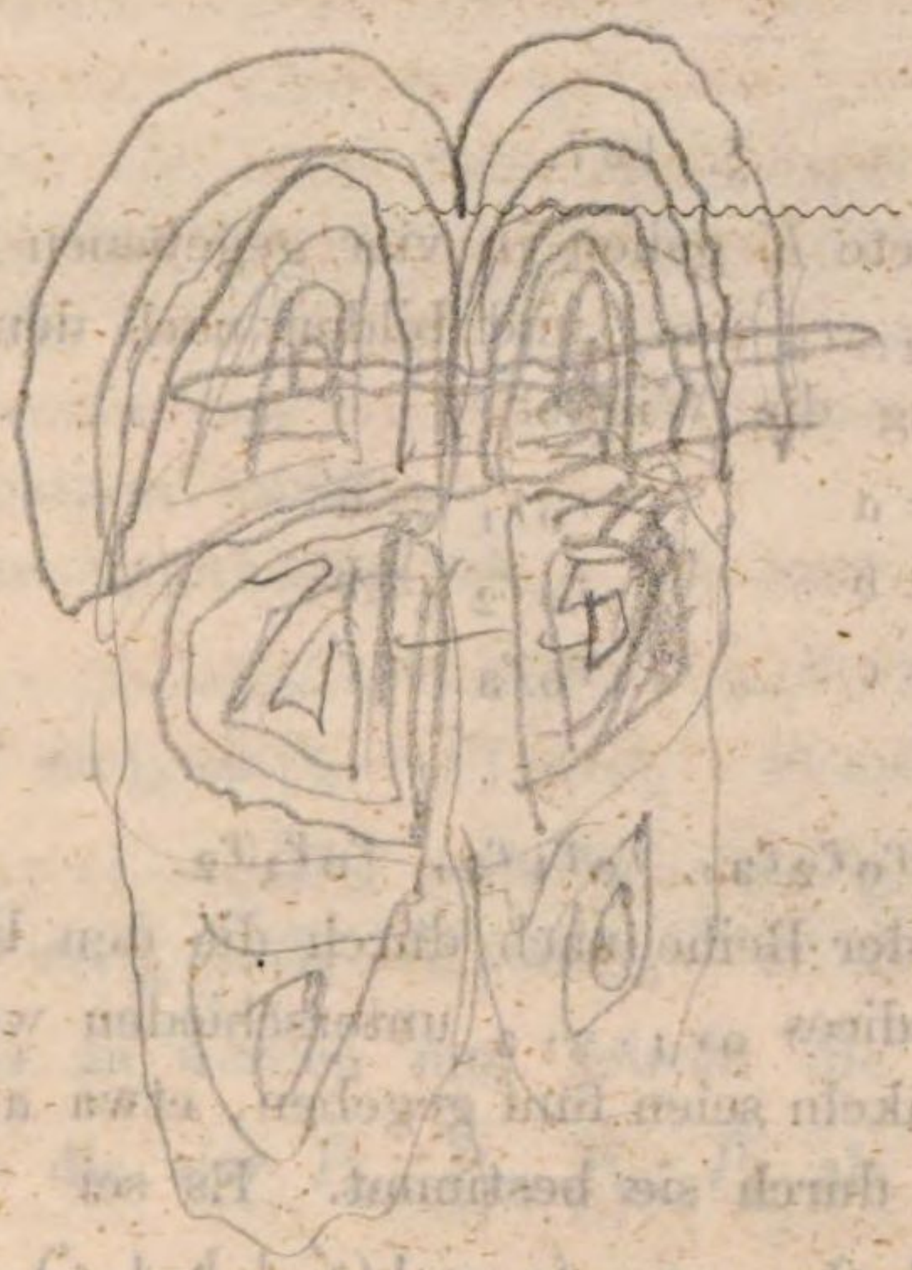
auf der rechten Seite wird $\mathfrak{U}$ gleich dem in 37. a mit L bezeichneten Ausdruck, und die Gleichung 400 geht in 37. a über. — Ebenso geht sie in 37. b über, wenn man in 399 und 400 setzt:

$$\psi_0 = \Pi_0,\ \psi_1 = \Pi_1,\ \psi_2 = \Pi_2,\ \psi_3 = \Pi_3$$

$$\mathfrak{o} = \cos\alpha' \quad \text{also} \quad \mathfrak{l} = \cos\alpha$$
$$\mathfrak{p} = \cos\beta' \qquad \mathfrak{m} = \cos\beta$$
$$\mathfrak{q} = \cos\gamma' \qquad \mathfrak{n} = \cos\gamma$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = -1$$

Die Gleichung 401 geht durch diese beiden Substitutionen in die 34. a. b über.



Sechszehntes Capitel.

Das Tetraeder zu berechnen aus dem Radius der umschriebenen Kugel und fünf von den sechs Winkeln, welche die vier nach den Eckpuncten gezogenen Radien bilden.

---

§. 197.

Fig. 80. Vom Puncte K gehen in vier gegebenen Richtungen vier Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 aus, und bilden nach der in §. 104 festgesetzten Bezeichnung die Winkel

$$r_2 r_3 = \mathfrak{a} \qquad r_0 r_1 = \mathfrak{a}'$$
$$r_1 r_3 = \mathfrak{b} \qquad r_0 r_2 = \mathfrak{b}'$$
$$r_1 r_2 = \mathfrak{c} \qquad r_0 r_3 = \mathfrak{c}'$$

und die vier Ecken

$$r_1 r_2 r_3, \quad r_0 r_2 r_3, \quad r_0 r_1 r_3, \quad r_0 r_1 r_2$$

deren Eckenfunctionen der Reihe nach durch die den betreffenden Zeichen angehängten Indices $_{0,\,1,\,2,\,3}$ unterschieden werden.

Von jenen sechs Winkeln seien fünf gegeben, etwa $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$; dann ist der sechste $\mathfrak{a}'$ durch sie bestimmt. Es sei

$$\mathfrak{f}_0 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{f}_2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}')$$
$$\mathfrak{f}_1 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}') \qquad \mathfrak{f}_3 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c})$$

so sind die Functionen

$$\overline{\overline{P_0}} = \sqrt{\sin \mathfrak{f}_0 \sin(\mathfrak{f}_0-\mathfrak{a}) \sin(\mathfrak{f}_0-\mathfrak{b}) \sin(\mathfrak{f}_0-\mathfrak{c})}$$
$$\overline{\overline{P_1}} = \sqrt{\sin \mathfrak{f}_1 \sin(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{a}) \sin(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{b}') \sin(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{c}')}$$

gegeben, da sie $\mathfrak{a}'$ nicht enthalten, und es ist nach 32. a:

$$\cos \mathfrak{a}' = \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{a}} \left\{ \begin{matrix} \cos\mathfrak{b}\cos\mathfrak{c}' + \cos\mathfrak{b}'\cos\mathfrak{c} \\ -(\cos\mathfrak{b}\cos\mathfrak{b}' + \cos\mathfrak{c}\cos\mathfrak{c}')\cos\mathfrak{a} \end{matrix} \mp 4\,\overline{\overline{P_0}}\,\overline{\overline{P_1}} \right\}$$

Hier gilt das obere Vorzeichen —, wenn die beiden Ecken $r_1 r_2 r_3$, $r_0 r_2 r_3$ in der Gegenlage sind, also das untere +, wenn sie in der Gleichlage sind (vergl. §. 22 und §. 28).

Daraus geht nun hervor, dass die fünf gegebenen Winkel den sechsten nicht ganz vollständig, sondern zweideutig bestimmen, wenn nicht zugleich angegeben ist, ob das Eckensystem, welches von den vier r gebildet wird, von der Art I. a oder II. a oder III. a (§. 19) ist. Dies wird durch Fig. 89 anschaulich. Denn bilden die drei Seitenwinkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Ecke $r_1 r_2 r_3$, so können die beiden andern gegebenen Winkel $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, von r_2 und r_3 ausgehend, ebensowohl auf der einen, als auf der andern Seite von $r_2 r_3$ zusammenstossen und dadurch zwei verschiedene Werthe von $r_0 r_1$ oder $\mathfrak{a}'$ bestimmen.

Wir nehmen also für die Folge an, dass mit den fünf Winkeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ auch die Art des Eckensystems gegeben sei, dessen Seiten sie ausmachen, und legen als Normalsystem das System von vier Ecken um einen Punct (I. a) zum Grunde, indem wir die Erörterung der für die anderen Systeme stattfindenden Abweichungen den für das System I. a ermittelten Resultaten anschliessen werden.

Nach der Berechnung von $\mathfrak{a}'$ ist dann

$$\overline{\overline{P_0}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2\mathfrak{a}' - \cos^2\mathfrak{b} - \cos^2\mathfrak{c}' + 2\cos\mathfrak{a}'\cos\mathfrak{b}\cos\mathfrak{c}')}$$
$$\text{oder} \quad = \sqrt{\sin\mathfrak{f}_2 \sin(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{a}') \sin(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{b}) \sin(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{c}')}$$

$$\overline{\overline{P_3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2\mathfrak{a}' - \cos^2\mathfrak{b}' - \cos^2\mathfrak{c} + 2\cos\mathfrak{a}'\cos\mathfrak{b}'\cos\mathfrak{c})}$$
$$\text{oder} \quad = \sqrt{\sin\mathfrak{f}_3 \sin(\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{a}') \sin(\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{b}') \sin(\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{c})}$$

Von hier an werden nun sowohl die sechs Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, als die vier $\overline{\overline{P_0}}$, $\overline{\overline{P_1}}$, $\overline{\overline{P_2}}$, $\overline{\overline{P_3}}$ als gegebene Grössen eingeführt.

§. 198.

Ist nun, wie es die Aufgabe zur Bedingung macht, $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = r$, so ist, wie leicht zu sehen,

$$l = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \qquad u = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'$$
$$m = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \qquad p = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'$$
$$n = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{c} \qquad q = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'$$

wodurch die Aufgabe auf die im vierzehnten Capitel behandelte

reducirt ist, indem in die dort gefundenen Resultate nur diese Werthe der Kanten substituirt zu werden brauchen, um auch die Auflösungen für die Aufgaben dieses sechszehnten Capitels zu haben. — Indessen sind diese Auflösungen, wie auch Carnot mit den in §. 168 angeführten Worten bemerkt, für eine Tetraedrometrie, die der uns geläufigen Trigonometrie entspreche, nicht ausreichend. Auch in der Planimetrie haben die durch viele und unvermischte Längengrössen ausgedrückten Formeln meist nur theoretischen, keinen practischen Werth, sind oft nur Curiositäten, mit denen sich weiter nichts anfangen lässt, als dass man sie eben betrachtet. Bei Heranziehung der Winkelgrössen findet man gewöhnlich theils interessantere Wege zum Ziele, theils fruchtbarere, für neue Entwickelungen empfänglichere Formeln. Dies findet in noch höherem Grade bei stereometrischen Untersuchungen statt, und es soll deshalb in diesem Capitel das Augenmerk darauf gerichtet sein, dessen Aufgaben nicht auf die des vierzehnten Capitels zu reduciren, und die zu suchenden Formeln nicht unmittelbar durch die gegebenen Winkel (oder die obigen Werthe der Kanten), sondern vorzugsweise durch die von jenen Winkeln bestimmten Eckenfunctionen auszudrücken, wodurch, wie man sehen wird, die Formeln, Carnot's Wunsche entsprechend, auch für den numerischen Calcul geschmeidiger werden.

Ueber die hier anzuwendenden Bezeichnungen geben §. 103 ff. Auskunft.

§. 199.

Die vier gleichen Strahlstrecken r_0, r_1, r_2, r_3, (die, obgleich ihre gemeinschaftliche Länge r ist, doch ihre Indices behalten mögen, wenn sie nach ihrer Lage von einander unterschieden werden sollen) bestimmen vier gleichschenklige dreiseitige „Centralpyramiden“ $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, für welche ausser den gleichen Gipfelkanten die Seitenwinkel der Gipfelecken gegeben sind. Die Berechnung einer solchen Centralpyramide, wozu wir $KABC$ oder $\mathfrak{p}_0$ wählen, aus den gegebenen Grössen r, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bildet hier eine besondere Aufgabe:

Eine dreiseitige gleichschenklige Pyramide aus der gegebenen Länge r der drei gleichen Gipfelkanten und

den gegebenen Seitenwinkeln a, b, c der Gipfelecke zu berechnen,

und darin wieder sind zunächst

die (im siebenten und achten Capitel aufgeführten) Eckenfunctionen der Gipfelecke $(r_1 r_2 r_3)$ durch ihre drei Seitenwinkel a, b, c auszudrücken.

1) $\overline{\overline{P}}_0$ siehe §. 197.

2) $$\overline{\overline{\Pi}}_0 = \frac{2\overline{\overline{P}}_0^2}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{\overline{\overline{P}}_0^2}{\overline{\overline{S}}_0 \overline{\overline{C}}_0}$$

3) $$\overline{\overline{M}}_0 = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2\overline{\overline{P}}_0} = \frac{\overline{\overline{S}}_0 \overline{\overline{C}}_0}{\overline{\overline{P}}_0}$$

4) $$\overline{\overline{S}}_0 = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c$$
$$\overline{\overline{S}}_0' = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c$$
. . .

5) $$\overline{\overline{C}}_0 = 2 \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c$$
$$\overline{\overline{C}}_0' = 2 \cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c$$
. . .

6) $$\overline{\overline{F}}_0 = \tfrac{1}{2}(1 + \cos a + \cos b + \cos c)$$
$$\overline{\overline{F}}_0' = \tfrac{1}{2}(1 + \cos a - \cos b - \cos c)$$
. . .

7) $$e_0 = \pi - f_0 = \pi - \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$
$$e_0' = f_0 - a = \tfrac{1}{2}(-a + b + c)$$
. . .

8) $$\operatorname{ctg} \mathfrak{r}_0 = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{\overline{\overline{S}}_0} = \frac{\overline{\overline{C}}_0}{\overline{\overline{M}}_0}$$
$$\operatorname{ctg} \mathfrak{r}_0' = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{\overline{\overline{S}}_0'} = \frac{\overline{\overline{C}}_0'}{\overline{\overline{M}}_0}$$
. . .

9) $$\operatorname{tg} r_0 = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{\sin e_0} = \overline{\overline{M}}_0 \overline{\overline{\Sigma}}_0$$
$$\operatorname{tg} r_0' = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{\sin e_0'} = \overline{\overline{M}}_0 \overline{\overline{\Sigma}}_0'$$
. . .

$$10)\quad \overline{\overline{\Sigma_0}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\sin e_0} = \frac{\operatorname{tg} r_0}{\overline{\overline{M_0}}}$$

$$\overline{\overline{\Sigma_0}}' = \frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\sin e_0'} = \frac{\operatorname{tg} r_0'}{\overline{\overline{M_0}}}$$

. . .

$$11)\quad \overline{\overline{\Gamma_0}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\operatorname{tg} r_0} = \frac{\sin e^0}{\overline{\overline{M_0}}}$$

$$\overline{\overline{\Gamma_0}}' = \frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\operatorname{tg} r_0'} = \frac{\sin e_0'}{\overline{\overline{M_0}}}$$

. . .

$$12)\quad \overline{\overline{\Phi_0}} = \overline{\overline{\Sigma_0}} \cos e_0 = \overline{\overline{\Pi_0}} \operatorname{ctg} e_0$$

$$\overline{\overline{\Phi_0}}' = \overline{\overline{\Sigma_0}}' \cos e_0' = \overline{\overline{\Pi_0}} \operatorname{ctg} e_0'$$

. . .

$$13)\quad \sin \mathfrak{E}_0 = \frac{\overline{\overline{P_0}}}{\overline{\overline{C_0}}} \qquad \cos \mathfrak{E}_0 = \frac{\overline{\overline{F_0}}}{\overline{\overline{C_0}}}$$

$$\sin \mathfrak{E}_0' = \frac{\overline{\overline{P_0}}}{\overline{\overline{C_0}}'} \qquad \cos \mathfrak{E}_0' = \frac{\overline{\overline{F_0}}'}{\overline{\overline{C_0}}'}$$

. . . . . .

$$14)\quad \overline{\overline{K}} = \frac{\sin e_0 + \overline{\overline{S_0}} \quad (75.)}{\overline{\overline{P_0}}}$$

$$= \frac{\sin e_0 + \sin e_0' + \sin e_0'' + \sin e_0'''}{2\,\overline{\overline{P_0}}} \quad (97.\,a)$$

$$= \frac{\overline{\overline{S_0}} + \overline{\overline{S_0}}' + \overline{\overline{S_0}}'' + \overline{\overline{S_0}}'''}{2\,\overline{\overline{P_0}}}$$

Die Formeln 8 — 13 folgen aus 68. a. b und 69. a. b.

§. 200.

Die übrigen Bestimmungsstücke der gleichschenkligen Centralpyramide $KABC$ oder $\mathfrak{p}_0$ sind:

1) Der Inhalt:

$$\mathfrak{p}_0 = \tfrac{1}{3} r^3 \overline{\overline{P_0}}$$

2) Die Höhe:

$$d_0 = r \cos \mathfrak{R}_0$$

3) Die Basis:

$$\triangle_0 = \frac{3\,\mathfrak{p}_0}{d_0} = \frac{r^2 \overline{\overline{P_0}}}{\cos \mathfrak{R}_0} = (\text{nach } 62.\,\text{a}) \frac{r^2 \overline{\overline{S_0}}}{\sin \mathfrak{R}_0}$$

und nach 56. a:

4) $$2 \triangle_0 = r^2 \sqrt{\begin{array}{l} \sin^2 \mathfrak{a} - 2(\cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c}) \\ + \sin^2 \mathfrak{b} - 2(\cos \mathfrak{b} - \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{c}) \\ + \sin^2 \mathfrak{c} - 2(\cos \mathfrak{c} - \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b}) \end{array}}$$

$$= r^2 \sqrt{\begin{array}{l} (1 - \cos \mathfrak{a})(1 + \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} - \cos \mathfrak{c}) \\ + (1 - \cos \mathfrak{b})(1 - \cos \mathfrak{a} + \cos \mathfrak{b} - \cos \mathfrak{c}) \\ + (1 - \cos \mathfrak{c})(1 - \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} + \cos \mathfrak{c}) \end{array}}$$

also

5) $$\triangle_0 = r^2 \sqrt{(\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathfrak{a}\, \overline{\overline{F_0}}' + \sin^2 \tfrac{1}{2} \mathfrak{b}\, \overline{\overline{F_0}}'' + \sin^2 \tfrac{1}{2} \mathfrak{c}\, \overline{\overline{F_0}}''')}$$

In den Formeln 4) und 5) wird $\triangle_0$ durch r, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ unmittelbar ausgedrückt. Für numerische Rechnungen aber wird es bequemer aus 3) berechnet, nachdem man zuvor $\mathfrak{R}_0$ gesucht hat

aus $\operatorname{ctg} \mathfrak{R}_0 = \dfrac{\overline{\overline{P_0}}}{\overline{\overline{S_0}}}$

6) Der Modulus der Basis:

$$2 \varrho_0 = 2 r \sin \mathfrak{R}_0$$

7) Die Kanten der Basis:

$$l = 2 r \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a} \qquad m = 2 r \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{b} \qquad n = 2 r \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{c}$$

§. 201.

Die Winkel der Basis und die an ihr gelegenen Ecken.

1) Die Winkel der Basis:

$$\sin a_1 = \frac{l}{2 \varrho_0} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{R}_0}$$

$$\sin b_2 = \frac{m}{2 \varrho_0} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{b}}{\sin \mathfrak{R}_0}$$

$$\sin c_3 = \frac{n}{2 \varrho_0} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{R}_0}$$

Aus $\sin a_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{R}_0} = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}\,\sqrt{\overline{\overline{S}}_0^2 + \overline{\overline{P}}_0^2}}{\overline{\overline{S}}_0}$ folgt:

$$\cos^2 a_1 = \frac{\overline{\overline{S}}_0^2 \cos^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a} - \overline{\overline{P}}_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\overline{\overline{S}}_0^2} = \frac{(\overline{\overline{C'}}_0^2 - \overline{\overline{P}}_0^2) \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\overline{\overline{S}}_0^2}$$

Da nun $\frac{\overline{\overline{P}}_0}{\overline{\overline{C}}_0'} = \sin \mathfrak{E}_0'$, also $\frac{\overline{\overline{C'}}_0^2 - \overline{\overline{P}}_0^2}{\overline{\overline{C'}}_0^2} = \cos^2 \mathfrak{E}_0'$, so ist

$$\cos^2 a_1 = \frac{\overline{\overline{C'}}_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a} \cos^2 \mathfrak{E}_0'}{\overline{\overline{S}}_0^2} = \cos^2 \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \cos^2 \mathfrak{E}_0', \text{ also}$$

2) $$\cos a_1 = \cos \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \cos \mathfrak{E}_0' = \frac{\cos \frac{1}{2}\mathfrak{a}\,\overline{\overline{F}}_0'}{\overline{\overline{C}}_0'}$$

$$= \frac{1 + \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} - \cos \mathfrak{c}}{4 \sin \frac{1}{2}\mathfrak{b} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{c}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}\,\overline{\overline{F}}_0'}{\overline{\overline{S}}_0}$$

$$\cos b_2 = \cos \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \cos \mathfrak{E}_0'' = \frac{\cos \frac{1}{2}\mathfrak{b}\,\overline{\overline{F}}_0''}{\overline{\overline{C}}_0''}$$

$$= \frac{1 - \cos \mathfrak{a} + \cos \mathfrak{b} - \cos \mathfrak{c}}{4 \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{c}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{b}\,\overline{\overline{F}}_0''}{\overline{\overline{S}}_0}$$

$$\cos c_3 = \cos \tfrac{1}{2}\mathfrak{c} \cos \mathfrak{E}_0''' = \frac{\cos \frac{1}{2}\mathfrak{c}\,\overline{\overline{F}}_0'''}{\overline{\overline{C}}_0'''}$$

$$= \frac{1 - \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} + \cos \mathfrak{c}}{4 \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{b}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{c}\,\overline{\overline{F}}_0'''}{\overline{\overline{S}}_0}$$

3) Die Winkel der Seitenflächen:

$$\sin \mathfrak{A}_0 = \frac{2\,\overline{\overline{P}}_0}{\sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}} \qquad \sin \mathfrak{B}_0 = \frac{2\,\overline{\overline{P}}_0}{\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{c}} \qquad \sin \mathfrak{C}_0 = \frac{2\,\overline{\overline{P}}_0}{\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b}}$$

4) Die Seitenflächen, nämlich die gleichschenkligen Dreiecke KBC, KAC, KAB, deren Grundlinien l, m, n sind, haben die Höhen $r \cos \frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $r \cos \frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $r \cos \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, welche mit l', m', n' bezeichnet werden, so dass

$$ll' = r^2 \sin \mathfrak{a}, \quad mm' = r^2 \sin \mathfrak{b}, \quad nn' = r^2 \sin \mathfrak{c}$$

ihre doppelten Inhalte sind.

5) Die Flächenwinkel, welche die Flächen der ll', mm', nn' mit der Basis $\triangle_0$ bilden, sind

$$\sin(ll', \triangle_0) = \frac{d_0}{l'} = \frac{\cos \mathfrak{R}_0}{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{a}}$$

$$\sin(mm', \triangle_0) = \frac{d_0}{m'} = \frac{\cos \mathfrak{R}_0}{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{b}}$$

$$\sin(nn', \triangle_0) = \frac{d_0}{n'} = \frac{\cos \mathfrak{R}_0}{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{c}}$$

6) Die Ecken an der Basis, zugleich Theilecken der Tetraederecken A, B, C haben die P-sinus:

$$2\,{}^1P_1 = \sin \mathfrak{a}_0 \cos \tfrac{1}{2} \mathfrak{b} \cos \tfrac{1}{2} \mathfrak{c} = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{2 \sin \frac{1}{2} \mathfrak{b} \sin \frac{1}{2} \mathfrak{c}}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} \mathfrak{a}\, \overline{\overline{P}}_0}{\overline{\overline{S}}_0} = \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a} \operatorname{ctg} \mathfrak{R}_0, \text{ also}$$

$$2\,{}^1P_1 = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{2 \sin \frac{1}{2} \mathfrak{b} \sin \frac{1}{2} \mathfrak{c}} = \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a} \operatorname{ctg} \mathfrak{R}_0$$

$$2\,{}^2P_2 = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{2 \sin \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \frac{1}{2} \mathfrak{c}} = \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{b} \operatorname{ctg} \mathfrak{R}_0$$

$$2\,{}^3P_3 = \frac{\overline{\overline{P}}_0}{2 \sin \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \frac{1}{2} \mathfrak{c}} = \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{c} \operatorname{ctg} \mathfrak{R}_0$$

7) Die M-Moduli dieser Ecken:

$${}^1M_1 = \frac{\sin a_1}{\sin \mathfrak{a}_0} = \frac{\sin \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{R}_0 \cdot 2\overline{\overline{P}}_0} = \frac{\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}}{2 \cos \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \mathfrak{R}_0\, 2\overline{\overline{P}}_0}$$

$$= (8.\,\mathfrak{b}) \frac{\overline{\overline{M}}_0}{2 \cos \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \mathfrak{R}_0}$$

und da nach 62. a: $\overline{\overline{P}}_0 \sin \mathfrak{R}_0 = \overline{\overline{S}}_0 \cos \mathfrak{R}_0$ ist, auch:

$${}^1M_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}}{2\overline{\overline{S}}_0 \cos \mathfrak{R}_0} = \frac{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{b} \cos \frac{1}{2} \mathfrak{c}}{\cos \mathfrak{R}_0}, \text{ also:}$$

$${}^1M_1 = \frac{\overline{\overline{M}}_0}{2 \cos \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \mathfrak{R}_0} = \frac{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{b} \cos \frac{1}{2} \mathfrak{c}}{\cos \mathfrak{R}_0}$$

$${}^2M_2 = \frac{\overline{\overline{M}}_0}{2 \cos \frac{1}{2} \mathfrak{b} \sin \mathfrak{R}_0} = \frac{\cos \frac{1}{2} \mathfrak{a} \cos \frac{1}{2} \mathfrak{c}}{\cos \mathfrak{R}_0}$$

$$^3M_3 = \frac{\overline{\overline{M}}_0}{2\cos\frac{1}{2}\mathfrak{c}\,\sin\mathfrak{R}_0} = \frac{\cos\frac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\frac{1}{2}\mathfrak{b}}{\cos\mathfrak{R}_0}$$

woraus hervorgeht:

$$8)\quad \frac{^1P_1}{^1M_1} = {}^1\Pi_1 = \frac{\overline{\overline{P}}_0\cos\mathfrak{R}_0}{\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}} = \tfrac{1}{2}\sin\mathfrak{A}_0\cos\mathfrak{R}_0$$

$$^2\Pi_2 = \frac{\overline{\overline{P}}_0\cos\mathfrak{R}_0}{\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{c}} = \tfrac{1}{2}\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{R}_0$$

$$^3\Pi_3 = \frac{\overline{\overline{P}}_0\cos\mathfrak{R}_0}{\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}} = \tfrac{1}{2}\sin\mathfrak{C}_0\cos\mathfrak{R}_0$$

§. 202.

Die wichtigsten Moduli der Pyramide $\mathfrak{p}_0$ sind:

$$1)\quad \mathfrak{M}_0 = \frac{\Delta_0}{\overline{\overline{\Pi}}_0} = \frac{r^2\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}}{2\overline{\overline{P}}_0\cos\mathfrak{R}_0} = \frac{r^2\overline{\overline{M}}_0}{\cos\mathfrak{R}_0}$$

$$2)\quad 2w_0 = \overline{\overline{\Pi}}_0 d_0 = \frac{2r\overline{\overline{P}}_0^2\cos\mathfrak{R}_0}{\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}} = \frac{r^2\overline{\overline{P}}_0^2\cos\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0\overline{\overline{C}}_0}$$

$$3)\quad 2\mu_0 = \frac{2\varrho_0}{\overline{\overline{M}}_0} = \frac{4r\overline{\overline{P}}_0\sin\mathfrak{R}_0}{\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}} = \frac{2r\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{M}}_0}$$

$$4)\quad \mathfrak{D}_0 = \frac{lmn}{\overline{\overline{P}}_0} = \frac{4r^3\overline{\overline{S}}_0}{\overline{\overline{P}}_0} = 4r^3\operatorname{tg}\mathfrak{R}_0$$

§. 203.

Nachdem die an der Centralpyramide $\mathfrak{p}_0$ vorkommenden Grössen durch r, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ausgedrückt sind, können für die Folge auch die an den Pyramiden $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ vorkommenden Grössen als durch r und die sechs Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ ausgedrückt angesehen werden, da diese aus jenen gefunden werden, indem man denjenigen der obigen Ausdrücke, welche den Index $_0$ haben, statt dessen die entsprechenden Indices $_{1,\,2,\,3}$ giebt, und an Stelle der Seitenwinkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eintreten lässt:

für	$KABC$	oder	$\mathfrak{p}_0$	die	Winkel	$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$
»	$KOBC$	»	$\mathfrak{p}_1$	»	»	$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}'$,	$\mathfrak{c}'$
»	$KOAC$	»	$\mathfrak{p}_2$	»	»	$\mathfrak{a}'$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}'$
»	$KOAB$	»	$\mathfrak{p}_3$	»	»	$\mathfrak{a}'$,	$\mathfrak{b}'$,	$\mathfrak{c}$

Somit können wir uns nun zu der Hauptaufgabe wenden, nämlich zur

Berechnung des Tetraeders $\mathfrak{T}$ aus dem Radius der umschriebenen Kugel und den Winkeln, welche die vier nach den Eckpuncten gezogenen Radien mit einander bilden.

§. 204.

Die vier Centralpyramiden sind

$$\mathfrak{p}_0 = \tfrac{1}{3} r^3 \overline{\overline{P}}_0 \quad \mathfrak{p}_1 = \tfrac{1}{3} r^3 \overline{\overline{P}}_1 \quad \mathfrak{p}_2 = \tfrac{1}{3} r^3 \overline{\overline{P}}_2 \quad \mathfrak{p}_3 = \tfrac{1}{3} r^3 \overline{\overline{P}}_3$$

1) Bilden nun die vier Radien (die wir nach ihrer Lage durch r_0, r_1, r_2, r_3, unterscheiden) vier Ecken um einen Punct, so ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

und das Centrum der umschriebenen Kugel liegt innerhalb des $\mathfrak{T}$.

2) Bilden die vier Radien ein System von der Art II. a (§. 8), so dass z. B. die Ecke $r_1 r_2 r_3$ durch r_0 dreigetheilt ist, so liegt K in dem an $\triangle_0$ gelegenen Aussenraume des $\mathfrak{T}$ und es ist

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

3) Bilden die vier Radien eine vierkantige Ecke (System III. a), worin etwa r_0 und r_1, r_2 und r_3 Gegenkanten seien, so liegt K in einem Aussenkeilraume des $\mathfrak{T}$, und zwar:

a) Ist der Winkel $(r_0 r_1) > (r_2 r_3)$, d. h. $\mathfrak{a}' > \mathfrak{a}$, so liegt die Kante $u = 2r \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}'$ als die grössere Kugelsehne dem Mittelpuncte K näher, als $l = 2r \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}$, also liegt K in dem an u stossenden Aussenkeilraume von $\mathfrak{T}$, und es ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3$$

b) Ist dagegen $(r_0 r_1) < (r_2 r_3)$ d. h. $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}$, so ist ebenso:

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

4) Liegen drei der gegebenen Radien, etwa r_1, r_2, r_3 in einer Ebne, und zwar so, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 2\pi$, so liegt K in der Ebne $\triangle_0$ und ist $\mathfrak{p}_0 = 0$ und

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3.$$

5) Liegen aber die drei Strahlen r_1, r_2, r_3 in einer Ebne so, dass r_1 den Winkel $(r_2 r_3)$ theilt, so ist wieder $\mathfrak{p}_0 = 0$, und, je nachdem $(r_0 r_1) >$ oder $< (r_2 r_3)$, ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3 \text{ oder } \mathfrak{T} = -\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

Denken wir uns nun in der Gleichung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

die Vorzeichen nach den eben aufgeführten Fällen modificirt, so soll diese Summe mit $[\mathfrak{p}_0]$ bezeichnet werden, so dass die Collectiv-Gleichung

$$\mathfrak{T} = [\mathfrak{p}_0]$$

alle obigen einzelnen Gleichungen umfasst.

Mit derselben Modification der Vorzeichen ist diese Form der Collectiv-Gleichung zu verstehen (vergl. 179):

$$3\,\mathfrak{T} = r^3 [\overline{\overline{P}}_0] \qquad (402.)$$

§. 205.

Die Grösse $[\overline{\overline{P}}_0]$, deren vier einzelne Glieder nach den Formeln 2. a, 3. a, 4. a, 5. a verschiedentlich durch die Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ ausgedrückt werden können, (für numerische Rechnungen am besten nach 2. a oder 3. a) ist ein neuer Modulus für das Tetraeder, oder auch für das Eckensystem von vier Strahlen im Raume. — Eine andere — weniger practisch, als theoretisch interessante — Form desselben kann so gefunden werden:

Wir haben nach 282 (vergl. 281):

$$16 \cdot 9\,\mathfrak{T}^2 \cdot 4\,r^2 = u^2 l^2 \overset{4}{X} + p^2 m^2 \overset{4}{Y} + q^2 n^2 \overset{4}{Z}$$

Setzen wir darin

$$u = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}', \qquad l = 2r \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$$

. . . . . .

so erhalten wir nach Division durch $(2r)^8$ die folgenden merkwürdigen Ausdrücke:

$$\frac{9\,\mathfrak{T}^2}{4\,r^6} \text{ oder nach } 402\text{: } \tfrac{1}{4}[\overline{\overline{P}}_0]^2 = \qquad (403.)$$

$$\begin{aligned}
&\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\,(-\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \\
&\qquad\qquad + \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}') \\
+&\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'\,(\ \ \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' - \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \\
&\qquad\qquad + \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}') \\
+&\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'\,(\ \ \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \\
&\qquad\qquad - \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}')
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' - \sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \quad (404.)$$
$$+ 2\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' - \sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'$$
$$+ 2\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' - \sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin^4\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'$$
$$= \quad (\quad \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}') \quad (405.)$$
$$\times(-\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}')$$
$$\times(\quad \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' - \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}')$$
$$\times(\quad \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' + \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' - \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}')$$

§. 206.

Die Winkel- und Eckenfunctionen der Tetraederecken durch die Winkel- und Eckenfunctionen der Centralecken auszudrücken.

Für die Ecke O haben wir nach §. 201:

$$1)\quad \sin a_0 = \frac{l}{2\varrho_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sin\mathfrak{R}_1}$$
$$\sin b_0 = \frac{m}{2\varrho_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{b}}{\sin\mathfrak{R}_2}$$
$$\sin c_0 = \frac{n}{2\varrho_3} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{c}}{\sin\mathfrak{R}_3}$$

worin die $\sin\mathfrak{R}_1$ . . nach der zu §. 200 gemachten Bemerkung zu berechnen sind.

$$2)\quad \cos a_0 = \cos\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\mathfrak{E}_1' = \frac{\cos\frac{1}{2}\mathfrak{a}\,\overline{\overline{F}}_1'}{\overline{\overline{C}}_1'}$$
$$= \frac{1+\cos\mathfrak{a}-\cos\mathfrak{b}'-\cos\mathfrak{c}'}{2\sin\frac{1}{2}\mathfrak{b}'\sin\frac{1}{2}\mathfrak{c}'} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}\,\overline{\overline{F}}_1'}{\overline{\overline{S}}_1}$$

$$\cos b_0 = \cos\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\cos\mathfrak{E}_2'' = \frac{\cos\frac{1}{2}\mathfrak{b}\,\overline{\overline{F}}_2''}{\overline{\overline{C}}_2''}$$
$$= \frac{1-\cos\mathfrak{a}'+\cos\mathfrak{b}-\cos\mathfrak{c}'}{2\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin\frac{1}{2}\mathfrak{c}'} = \frac{\sin\,{}^1\mathfrak{b}\,\overline{\overline{F}}_2''}{\overline{\overline{S}}_2}$$

$$\cos c_0 = \cos\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\cos\mathfrak{E}_3''' = \frac{\cos\frac{1}{2}\mathfrak{b}\,\overline{\overline{F}}_3'''}{\overline{\overline{C}}_3'''}$$
$$= \frac{1-\cos\mathfrak{a}'-\cos\mathfrak{b}'+\cos\mathfrak{c}}{2\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin\frac{1}{2}\mathfrak{b}'} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{c}\,\overline{\overline{F}}_3'''}{\overline{\overline{S}}_3}$$

Ferner ist $3\,\mathfrak{T} = upq\,P_0$, d. h.:

$$r^3\,[\overline{\overline{P_0}}] = 8\,r^3 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'\,P_0$$

und daraus:

$$3)\quad P_0 = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]}{8 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'}$$

Nun ist nach 1) (vergl. 8. b):

$$\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0 = 2\,M_0\,P_0 = \frac{\overline{\overline{S_0}}}{2 \sin\mathfrak{R}_1 \sin\mathfrak{R}_2 \sin\mathfrak{R}_3}$$

woraus nach 3) folgt:

$$4)\quad M_0 = \frac{2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'\ \overline{\overline{S_0}}}{[\overline{\overline{P_0}}] \sin\mathfrak{R}_1 \sin\mathfrak{R}_2 \sin\mathfrak{R}_3} \text{ also}$$

$$5)\quad \Pi_0 = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]^2 \sin\mathfrak{R}_1 \sin\mathfrak{R}_2 \sin\mathfrak{R}_3}{16 \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'\ \overline{\overline{S_0}}}$$

so wie auch $\sin\alpha = \dfrac{\sin a_0}{M_0}$ u. s. w. daraus gefunden werden kann.

§. 207.

Die Formeln werden aber geschmeidiger, wenn man auch $\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\frac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\frac{1}{2}\mathfrak{c}'$, das Product der Sinus der halben Winkel, welche ein Radius (r_0) mit den drei anderen macht, durch die Eckenfunctionen ausdrückt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c} &= \overline{\overline{S_0}} \\
2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' &= \overline{\overline{S_1}} \\
2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' &= \overline{\overline{S_2}} \\
2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c} &= \overline{\overline{S_3}}
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$4 \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' = \frac{\overline{\overline{S_1}}\,\overline{\overline{S_2}}\,\overline{\overline{S_3}}}{\overline{\overline{S_0}}}$$

und wenn man bezeichnet:

$$\overline{\overline{S_0}}\,\overline{\overline{S_1}}\,\overline{\overline{S_2}}\,\overline{\overline{S_3}} = (\overline{\overline{S_0}}),$$

$$2 \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' = \frac{\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}}{\overline{\overline{S_0}}} \qquad (406.)$$

Nach §. 206. 3 ist nun auch:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}' \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{c}' = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]}{4 P_0} \qquad (407.)$$

also ist

$$\frac{P_0}{\overline{\overline{S_0}}} = \frac{P_1}{\overline{\overline{S_1}}} = \frac{P_2}{\overline{\overline{S_2}}} = \frac{P_3}{\overline{\overline{S_3}}} = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]}{4\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}} = \overline{\overline{\mathfrak{W}}} \qquad (408.)$$

ein Modulus des Tetraeders, (der fortan mit $\overline{\overline{\mathfrak{W}}}$ bezeichnet werde), woraus dann weiter ein neuer Ausdruck für den Modulus $\sqrt{(P_0)}$ (206. 207) folgt, nämlich:

$$16\sqrt{(P_0)}\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})} = [\overline{\overline{P_0}}]^2, \text{ also} \qquad (409.)$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{W}}} = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]}{4\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}} = \frac{4\sqrt{(P_0)}}{[\overline{\overline{P_0}}]} \text{ oder} \qquad (410.)$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{W}}}\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})} = \frac{\sqrt{(P_0)}}{\overline{\overline{\mathfrak{W}}}} = \tfrac{1}{4}[\overline{\overline{P_0}}] \qquad (411.)$$

Ferner ist auch, da nach 68. b: $\overline{\overline{S_0}} = \overline{\overline{P_0}} \operatorname{tg} \mathfrak{r}_0$, nach 408:

$$\overline{\overline{\mathfrak{W}}} = \frac{P_0}{\overline{\overline{P_0}} \operatorname{tg} \mathfrak{r}_0} = \frac{S_0 \operatorname{ctg} \varrho_0}{\overline{\overline{S_0}}} \qquad (412.)$$

§. 208.

Damit lassen sich nun zunächst die Formeln des §. 206 vervollständigen. Es ist nämlich:

3) $P_0 = \overline{\overline{\mathfrak{W}}} S_0 = \dfrac{[\overline{\overline{P_0}}]\,\overline{\overline{S_0}}}{4\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}}$

4) $M_0 = \dfrac{1}{4\,\overline{\overline{\mathfrak{W}}} \sin \mathfrak{r}_1 \sin \mathfrak{r}_2 \sin \mathfrak{r}_3} = \dfrac{\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}}{[\overline{\overline{P_0}}] \sin \mathfrak{r}_1 \sin \mathfrak{r}_2 \sin \mathfrak{r}_3}$

5) $\Pi_0 = 4\,\overline{\overline{\mathfrak{W}}}^2\,\overline{\overline{S_0}} \sin \mathfrak{r}_1 \sin \mathfrak{r}_2 \sin \mathfrak{r}_3$

$$= \tfrac{1}{4}[\overline{\overline{P_0}}]^2 \frac{\sin \mathfrak{r}_1}{\overline{\overline{S_1}}} \frac{\sin \mathfrak{r}_2}{\overline{\overline{S_2}}} \frac{\sin \mathfrak{r}_3}{\overline{\overline{S_3}}}$$

nach (62. a) $= \tfrac{1}{4}[\overline{\overline{P_0}}]^2 \dfrac{\cos \mathfrak{r}_1}{\overline{\overline{P_1}}} \dfrac{\cos \mathfrak{r}_2}{\overline{\overline{P_2}}} \dfrac{\cos \mathfrak{r}_3}{\overline{\overline{P_3}}}$

Ferner ist $\sin\alpha = \dfrac{\sin a_0}{M_0} = 4\,\overline{\overline{\mathfrak{W}}}\sin\mathfrak{R}_2\sin\mathfrak{R}_3\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$

$$= [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}}\sin\mathfrak{R}_2\sin\mathfrak{R}_3$$

Nun ist aber

$$\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})} = 4\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\,\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'$$

$$\overline{\overline{S_2}}\,\overline{\overline{S_3}} = 4\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'$$

also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}'}{\overline{\overline{S_2}}\,\overline{\overline{S_3}}}$$

und daher

$$6)\quad \sin\alpha = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S_2}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_3}{\overline{\overline{S_3}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}' \qquad (413.)$$

$$\sin\beta = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_1}{\overline{\overline{S_1}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_3}{\overline{\overline{S_3}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'$$

$$\sin\gamma = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_1}{\overline{\overline{S_1}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S_2}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}'$$

$$\sin\alpha' = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S_0}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S_1}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$$

$$\sin\beta' = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S_0}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S_2}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}$$

$$\sin\gamma' = [\overline{\overline{P_0}}]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S_0}}}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_3}{\overline{\overline{S_3}}}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{c}$$

wobei wieder zu erinnern ist, dass $\dfrac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S_0}}}\,\cdot\,\cdot = \dfrac{\cos\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{P_0}}}\,\cdot\,\cdot$

nach 60. a (vergl. 62. a) durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\ldots$ unmittelbar ausgedrückt werden können, für numerische Rechnungen aber vermittels der Formel $\operatorname{tg}\mathfrak{R}_0 = \dfrac{\overline{\overline{S_0}}}{\overline{\overline{P_0}}}$ gefunden werden.

§. 209.

Alle diese Formeln haben noch eine andere bemerkenswerthe Bedeutung. — Die Flächenwinkel $\alpha, \beta\ldots$ des $\mathfrak{T}$ sind nämlich die

Supplemente der Winkel a, b, c, a', b', c', welche die d_0, d_1, d_2, d_3, d. h. welche die Axen der den Ecken $r_1 r_2 r_3$, $r_0 r_2 r_3$, $r_0 r_1 r_3$, $r_0 r_1 r_2$ umschriebenen Kugel mit einander machen. Ebenso sind die Tetraederecken O, A, B, C die Polarecken der Ecken $d_1 d_2 d_3$, $d_0 d_2 d_3$, $d_0 d_1 d_3$, $d_0 d_1 d_2$, also $a_0 = \pi - \alpha_0$, . . $a_1 = \pi - \alpha_1$ . . (§. 104). Ferner ist $P_0 = \overline{\Pi}_0$, $\Pi_0 = \overline{P}_0$, $M_0 = \frac{1}{\overline{M}_0}$, $P_1 = \overline{\Pi}_1$ u. s. w. Setzen wir diese Werthe in die Formeln 1—6 in §. 206 und 208 ein, so können wir von dem Tetraeder $\mathfrak{T}$ ganz abstrahiren, und haben die Auflösung dieser Aufgabe:

Durch die Winkel von vier der Lage nach gegebenen Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 die Functionen der Winkel und Ecken auszudrücken, welche die Axen der den Ekken $r_1 r_2 r_3$, $r_0 r_2 r_3$, $r_0 r_1 r_3$, $r_0 r_1 r_2$ umschriebenen Kegel mit einander bilden.

Und da nach §. 199, 8, oder auch nach den Formeln 60. a, 62. a auch $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ gegeben sind, so sind also aus dem Vorhergehenden mit fünfen von den Winkeln, welche vier Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 bilden, auch alle Winkel bekannt, welche die Axen d_0, d_1, d_2, d_3 unter sich, und mit jenen Strahlen bilden. Es fehlen unter den letzteren nur noch die Winkel $(d_0 r_0)$, $(d_1 r_1)$, $(d_2 r_2)$, $(d_3 r_3)$, welche je eine Axe mit demjenigen Strahle bildet, welcher nicht der ihr zugehörigen Ecke angehört. Auch diese Winkel werden nun aber leicht gefunden, indem man die auf r_0 bezogene Ecken- und Seitengleichung

$$\overline{\overline{P}}_0 + \overline{\overline{P}}_1 \cos \mathfrak{a}' + \overline{\overline{P}}_2 \cos \mathfrak{b}' + \overline{\overline{P}}_3 \cos \mathfrak{c}' = 0$$

auf d_0 überbezieht (§. 50). Man erhält dadurch:

$$\overline{\overline{P}}_0 \cos(d_0 r_0) + \overline{\overline{P}}_1 \cos(d_0 r_1) + \overline{\overline{P}}_2 \cos(d_0 r_2) + \overline{\overline{P}}_3 \cos(d_0 r_3) = 0$$

und, weil $(d_0 r_1) = (d_0 r_2) = (d_0 r_3) = \mathfrak{R}_0$ ist:

$$\cos(d_0 r_0) = -(\overline{\overline{P}}_1 + \overline{\overline{P}}_2 + \overline{\overline{P}}_3) \frac{\cos \mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{P}}_0} = -(\overline{\overline{P}}_1 + \overline{\overline{P}}_2 + \overline{\overline{P}}_3) \frac{\sin \mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0} \quad (414.)$$

§. 210.

Einen andern Ausdruck für $\cos(d_0 r_0)$ findet man aus den Theilecken, in welche die Ecke $r_1 r_2 r_3$ durch d_0 zerlegt wird.

Es ist nämlich die E-S-Gleichung für $(d_0) r_1 r_2 r_3$:

$$P(r_1 r_2 r_3) = P(d_0 r_2 r_3) \cos(d_0 r_1) + P(d_0 r_1 r_3) \cos(d_0 r_2) + P(d_0 r_1 r_2) \cos(d_0 r_3)$$

also, wenn wir sie auf r_0 überbeziehen:

$$P(r_1 r_2 r_3) \cos(d_0 r_0) = P(d_0 r_2 r_3) \cos(r_0 r_1) + P(d_0 r_1 r_3) \cos(r_0 r_2) + P(d_0 r_1 r_2) \cos(r_0 r_3)$$

Nun ist $P(r_1 r_2 r_3) = \overline{\overline{P}}_0$. — In der Ecke $(d_0 r_2 r_3)$ sind zwei Seitenwinkel $(d_0 r_2) = (d_0 r_3) = \mathfrak{R}_0$, und da d_0 das $\triangle_0$ im Mittelpunct des umschriebenen Kreises trifft, also die vom Fusspuncte des d_0 nach A, B, C gezogenen Radien die Winkel $2a_1$, $2b_2$, $2c_3$ bilden, so ist nach 1. a:

$$2 P(d_0 r_2 r_3) = \sin^2 \mathfrak{R}_0 \sin 2a_1$$
$$2 P(d_0 r_1 r_3) = \sin^2 \mathfrak{R}_0 \sin 2b_2$$
$$2 P(d_0 r_1 r_2) = \sin^2 \mathfrak{R}_0 \sin 2c_3$$

ferner ist $(r_0 r_1) = \mathfrak{a}'$, $(r_0 r_2) = \mathfrak{b}'$, $(r_0 r_3) = \mathfrak{c}'$, also

$$2 \overline{\overline{P}}_0 \cos(d_0 r_0) = \sin^2 \mathfrak{R}_0 (\sin 2a_1 \cos \mathfrak{a}' + \sin 2b_2 \cos \mathfrak{b}' + \sin 2c_3 \cos \mathfrak{c}')$$

Nun ist nach §. 200. 1. 2:

$$\sin a_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{R}_0}, \quad \cos a_1 = \cos \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} \cos \mathfrak{E}_0'$$

also $\sin 2a_1 = \dfrac{\sin \mathfrak{a} \cos \mathfrak{E}_0'}{\sin \mathfrak{R}_0}$ u. s. w., also

$$2 \overline{\overline{P}}_0 \cos(d_0 r_0) = \sin \mathfrak{R}_0 \left\{ \begin{array}{l} \sin \mathfrak{a} \cos \mathfrak{a}' \cos \mathfrak{E}_0' \\ + \sin \mathfrak{b} \cos \mathfrak{b}' \cos \mathfrak{E}_0'' \\ + \sin \mathfrak{c} \cos \mathfrak{c}' \cos \mathfrak{E}_0''') \end{array} \right\} \qquad (415.)$$

Setzt man hierin $\cos \mathfrak{E}_0' = \dfrac{\overline{\overline{F}}_0'}{\overline{\overline{C}}_0'} = \dfrac{\overline{\overline{F}}_0'}{2 \cos \frac{1}{2}\mathfrak{a} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{b} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{c}}$

und $\dfrac{\sin \mathfrak{a}}{\cos \frac{1}{2}\mathfrak{a}} = \dfrac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a}}{\sin \frac{1}{2}\mathfrak{a}}$, u. s. w., so wird

$$\overline{\overline{P}}_0 \cos(d_0 r_0) = \frac{\sin \mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0} \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathfrak{a}' \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{a}\, \overline{\overline{F}}_0' \\ + \cos \mathfrak{b}' \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{b}\, \overline{\overline{F}}_0'' \\ + \cos \mathfrak{c}' \sin^2 \frac{1}{2}\mathfrak{c}\, \overline{\overline{F}}_0''' \end{array} \right\} \qquad (416.)$$

§. 210.

Die Moduli des Tetraeders $\mathfrak{T}$.

Aus §. 204 haben wir schon

$$1)\quad 3\,\mathfrak{T} = r^3\,[\overline{\overline{P}}_0] \tag{402.}$$

und aus §. 208. 6:

$$\sin\alpha = [\overline{\overline{P}}_0]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S}}_2}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_3}{\overline{\overline{S}}_3}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'$$

$$\sin\alpha' = [\overline{\overline{P}}_0]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_1}{\overline{\overline{S}}_0}\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$$

also, wenn man schreibt:

$$\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_1}{\overline{\overline{S}}_1}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_2}{\overline{\overline{S}}_2}\,\frac{\sin\mathfrak{R}_3}{\overline{\overline{S}}_3} = \left(\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\right)$$

$$\sin\alpha\,\sin\alpha' = [\overline{\overline{P}}_0]^2\left(\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\right)\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\,\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'$$

also, da $2r\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a} = l$, $2r\sin\frac{1}{2}\mathfrak{a}' = u$, nach 191:

$$2)\quad \mathfrak{M} = \frac{4r^2}{[\overline{\overline{P}}_0]^2}\left(\frac{\overline{\overline{S}}_0}{\sin\mathfrak{R}_0}\right) = \frac{4r^2}{[\overline{\overline{P}}_0]^2}\left(\frac{\overline{\overline{P}}_0}{\cos\mathfrak{R}_0}\right) \tag{417.}$$

daher:

$$3)\quad 2\,w = \frac{3\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{r}{4}\,[\overline{\overline{P}}_0]^3\left(\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\right) \tag{418.}$$

woraus sich nach §. 208. 5 ergiebt:

$$4)\quad h_0 = r\,[\overline{\overline{P}}_0]\,\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}$$

$$5)\quad \triangle_0 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{h_0} = \frac{r^2\,\overline{\overline{S}}_0}{\sin\mathfrak{R}_0}$$

$$6)\quad (h_0) = r^4\,[\overline{\overline{P}}_0]^4\left(\frac{\sin\mathfrak{R}_0}{\overline{\overline{S}}_0}\right) \tag{419.}$$

der Radius einer Berührungskugel (vergl. §. 119):

$$7)\quad d = \frac{3\,\mathfrak{T}}{[\triangle_0]} = \frac{r\,[\overline{\overline{P}}_0]}{\left[\dfrac{\overline{\overline{S}}_0}{\sin\mathfrak{R}_0}\right]} = \frac{r\,[\overline{\overline{P}}_0]}{\left[\dfrac{\overline{\overline{P}}_0}{\cos\mathfrak{R}_0}\right]} \tag{420.}$$

Hier ist zu bemerken, dass die Vorzeichen der je vier Glieder in $[\overline{\overline{P_0}}]$ und in $\left[\frac{\overline{\overline{S_0}}}{\sin \Re_0}\right]$ nicht übereinstimmen, sondern im ersteren Ausdruck nach der Art des Eckensystems der r_0, r_1, r_2, r_3 (§. 204), im zweiten nach der Lage der gesuchten Berührungskugel (§. 119) sich bestimmen. Liegen die Mittelpuncte beider Kugeln im Innern des $\mathfrak{T}$, so sind in beiden Ausdrücken die sämmtlichen Vorzeichen $+$.

$$8)\quad \mathfrak{D} = \frac{lmn}{P_0} = \frac{4 r^3 \overline{\overline{S_0}}}{P_0} = \frac{4 r^3}{\mathfrak{W}} \qquad (421.)$$

(vergl. §. 207 Nr. 408):

$$9)\quad \sqrt{(P_0)} = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{4}[\overline{\overline{P_0}}]\,\overline{\overline{\mathfrak{W}}} \qquad (422.)$$

$$10)\quad \mu = \frac{w}{\sqrt{(P_0)}} = 8 r\,\overline{\overline{\mathfrak{W}}}\,(\sin \Re_0) \qquad (423.)$$

§. 211.

Es besteht eine Gleichung zwischen den P_0, P_1, P_2, P_3 der vier Tetraederecken, und den $\overline{\overline{P_0}}$, $\overline{\overline{P_1}}$, $\overline{\overline{P_2}}$, $\overline{\overline{P_3}}$ der vier Ecken, die von den nach den Eckpuncten gezogenen Radien der umschriebenen Kugel gebildet werden.

Obgleich sie nicht von practischer Bedeutung ist, so verdient sie doch theils wegen ihrer Form, theils wegen ihrer Herleitung hier aufgenommen zu werden.

Nach 150 ist allgemein für jeden Punct K

$$2 P_0 r_0^2 = u_0 d_1 \sin a_0 + p_0 d_2 \sin b_0 + q_0 d_3 \sin c_0$$

Für den Mittelpunct der umschriebenen Kugel ist aber, wie leicht zu erkennen:

$$u_0 = \tfrac{1}{2}u \qquad p_0 = \tfrac{1}{2}p \qquad q_0 = \tfrac{1}{2}q$$

$$\sin a_0 = \frac{l}{2\varrho_1} \qquad \sin b_0 = \frac{m}{2\varrho_2} \qquad \sin c_0 = \frac{n}{2\varrho_3}$$

$$\frac{d_1}{\varrho_1} = \operatorname{ctg} \Re_1 \qquad \frac{d_2}{\varrho_2} = \operatorname{ctg} \Re_2 \qquad \frac{d_3}{\varrho_3} = \operatorname{ctg} \Re_3$$

wodurch die Gleichung nebst den drei anderen für die Ecken A, B, C zu bildenden die Form annimmt:

$$8\,P_0\,r^2 = u\,l\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + p\,m\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + q\,n\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3 \qquad (424.)$$
$$8\,P_1\,r^2 = u\,l\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + p\,m\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3 + q\,n\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2$$
$$8\,P_2\,r^2 = u\,l\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3 + p\,m\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + q\,n\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1$$
$$8\,P_3\,r^2 = u\,l\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + p\,m\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + q\,n\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0$, $\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1$, $\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2$, $\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3$, so ergiebt sich durch Addition und Subtraction:

$$4\,r^2\,(P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 - P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 - P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$= u\,l\;(\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 - \mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$4\,r^2\,(P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 - P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 - P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$= p\,m\,(\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 - \mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$4\,r^2\,(P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 - P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 - P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$= q\,n\;(\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3 - \mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2)$$

Setzt man die daraus sich ergebenden Werthe von $u\,l$, $p\,m$, $q\,n$ in eine der ursprünglichen Gleichungen, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$2\,P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3 \qquad (425.)$$
$$+ 2\,P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3$$
$$+ 2\,P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3$$
$$+ 2\,P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2$$
$$=$$
$$\mathrm{ctg}^2\,\mathfrak{R}_0\,(-P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$+ \mathrm{ctg}^2\,\mathfrak{R}_1\,(\;\;P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 - P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$+ \mathrm{ctg}^2\,\mathfrak{R}_2\,(\;\;P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 - P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 + P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$
$$+ \mathrm{ctg}^2\,\mathfrak{R}_3\,(\;\;P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 + P_1\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_1 + P_2\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_2 - P_3\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_3)$$

eine Gleichung zwischen den P-sinus der Tetraederecken und den Cotangenten der Axenwinkel der Kegel, welche den vier Ecken am Mittelpuncte umschrieben sind.

Setzt man darin nach 412

rechts: $P_0\,\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0 = \overline{\overline{\mathfrak{W}}}\;\overline{\overline{P_0}}$ u. s. w., links: $P_0 = \dfrac{\mathfrak{W}\,P_0}{\mathrm{ctg}\,\mathfrak{R}_0}$

so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&2\,\overline{\overline{P}}_0 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_1 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_2 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_3 \\
&+2\,\overline{\overline{P}}_1 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_0 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_2 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_3 \\
&+2\,\overline{\overline{P}}_2 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_0 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_1 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_3 \\
&+2\,\overline{\overline{P}}_3 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_0 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_1 \operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_2
\end{aligned}
\qquad (426.)
$$

$$
= (\operatorname{ctg}\mathfrak{R}_0)\begin{cases}
\operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_0\,(-\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)\\
+\operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_1\,(\;\overline{\overline{P}}_0-\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)\\
+\operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_2\,(\;\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1-\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)\\
+\operatorname{ctg}^2\mathfrak{R}_3\,(\;\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2-\overline{\overline{P}}_3)
\end{cases}
$$

eine Gleichung zwischen den P-sinus der vier Centralecken und den Cotangenten der Axenwinkel der ihnen umschriebenen Kegel.

Ersetzt man dagegen in 425 überall $\operatorname{ctg}\mathfrak{R}_0$ durch $\dfrac{\overline{\overline{\mathfrak{W}}}\,\overline{\overline{P}}_0}{P_0}$ u. s. w. und dividirt durch $\overline{\overline{\mathfrak{W}}}^3$, so erhält man die Eingangs des §. erwähnte Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{(P_0)}\,(P_0^2\,\overline{\overline{P}}_1\,\overline{\overline{P}}_2\,\overline{\overline{P}}_3+P_1^2\,\overline{\overline{P}}_0\,\overline{\overline{P}}_2\,\overline{\overline{P}}_3+P_2^2\,\overline{\overline{P}}_0\,\overline{\overline{P}}_1\,\overline{\overline{P}}_3+P_3^2\,\overline{\overline{P}}_0\,\overline{\overline{P}}_1\,\overline{\overline{P}}_2)\\
&=\frac{\overline{\overline{P}}_0^2}{P_0^2}\,(-\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)+\frac{\overline{\overline{P}}_1^2}{P_1^2}\,(\overline{\overline{P}}_0-\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)\qquad (427.)\\
&+\frac{\overline{\overline{P}}_2^2}{P_2^2}\,(\;\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1-\overline{\overline{P}}_2+\overline{\overline{P}}_3)+\frac{\overline{\overline{P}}_3^2}{P_3^2}\,(\overline{\overline{P}}_0+\overline{\overline{P}}_1+\overline{\overline{P}}_2-\overline{\overline{P}}_3)
\end{aligned}
$$

Man kann dieser Gleichung auf ähnliche Weise durch andere Substitutionen noch manche andere interessante Formen abgewinnen, die aber alle, wie die hier gegebenen, keinen practischen Werth haben, sondern nur wissenschaftliche Schaustücke sind.

Siebzehntes Capitel.

Seien vier von einem Puncte im Raume ausgehende Strahlen der Lage nach gegeben und auf ihnen vier bestimmte Längen; es soll das Tetraeder berechnet werden, welches von den vier durch die Endpuncte der Strahlenstrecken auf diesen normal gelegten Ebnen gebildet wird.

---

§. 212.

Die vier von dem Puncte K ausgehenden gegebenen Strahlenstrecken seien (Fig. 81)

$$KD_0 = d_0,\ KD_1 = d_1,\ KD_2 = d_2,\ KD_3 = d_3$$

und von ihren sechs Winkeln

$$d_2 d_3 = a \qquad d_1 d_3 = b \qquad d_1 d_2 = c$$
$$d_0 d_1 = a' \qquad d_0 d_2 = b' \qquad d_0 d_3 = c'$$

seien fünf gegeben. Dann wird der sechste nach einer der Formeln 32. a ebenso berechnet, wie in §. 197 aus fünfen der Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ der sechste gefunden worden ist.

Es geht ebenso, wie dort, daraus hervor, dass die Aufgabe nur dann eine vollständig bestimmte ist, wenn ausser den fünf Winkeln auch die Art des Eckensystems gegeben ist, welches die d_0, d_1, d_2, d_3 bilden. — Wir haben also fortan alle sechs Winkel der vier gegebenen Strahlen als gegeben oder bekannt zu betrachten, so wie die Summen $\overline{s}_0$, $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$ und die Functionen $\overline{P}_0$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ (§. 105.).

§. 213.

Dadurch lassen sich nun zunächst auch die andern im siebenten und achten Capitel behandelten Functionen der Ecken $d_1 d_2 d_3$,

$d_0 d_2 d_3$, $d_0 d_1 d_3$, $d_0 d_1 d_2$ (deren Indices der Reihe nach $_{0, 1, 2, 3}$ sind), ausdrücken:

1) $\overline{M}_0 = \dfrac{\sin a \sin b \sin c}{\overline{P}_0}$ $\qquad$ $M_1 = \dfrac{\sin a \sin b' \sin c'}{\overline{P}_1}$

$M_2 = \dfrac{\sin a' \sin b \sin c'}{\overline{P}_2}$ $\qquad$ $M_3 = \dfrac{\sin a' \sin b' \sin c}{\overline{P}_3}$

2) $\overline{\Pi}_0 = \dfrac{2\,\overline{P}_0^2}{\sin a \sin b \sin c}$ $\qquad$ $\overline{\Pi}_1 = \dfrac{\overline{P}_1}{\overline{M}_1}$

$\overline{\Pi}_2 = \dfrac{\overline{P}_2}{\overline{M}_2}$ $\qquad$ $\overline{\Pi}_3 = \dfrac{\overline{P}_3}{\overline{M}_3}$

3) $\overline{S}_0 = 2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$ $\qquad$ $\overline{S}_0' = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$

$\overline{S}_1 = 2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b' \sin \frac{1}{2}c'$ $\qquad$ $\overline{S}_1' = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b' \cos \frac{1}{2}c'$

u. s. w. $\qquad$ u. s. w.

4) $\overline{C}_0 = 2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$ $\qquad$ $\overline{C}_0' = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$.

$\overline{C}_1 = 2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b' \cos \frac{1}{2}c'$ $\qquad$ $\overline{C}_1' = 2 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b' \sin \frac{1}{2}c'$

u. s. w. $\qquad$ u. s. w.

5) $2\,\overline{F}_0 = 1 + \cos a + \cos b + \cos c$

$2\,\overline{F}_0' = 1 + \cos a - \cos b - \cos c$

u. s. w.

$2\,\overline{F}_1 = 1 + \cos a + \cos b' + \cos c'$

$2\,\overline{F}_1' = 1 + \cos a - \cos b' - \cos c'$

u. s. w.

6) $\overline{e}_0 = \pi - \overline{s}_0$ $\quad$ $\overline{e}_0' = \overline{s}_0 - a$ $\quad$ $\overline{e}_0'' = \overline{s}_0 - b$ $\quad$ $\overline{e}_0''' = \overline{s}_0 - c$

$\overline{e}_1 = \pi - \overline{s}_1$ $\quad$ $\overline{e}_1' = \overline{s}_1 - a$ $\quad$ $\overline{e}_1'' = \overline{s}_1 = b'$ $\quad$ $\overline{e}_1''' = \overline{s}_1 - c'$

u. s. w.

7) $\overline{\Sigma}_0 = \dfrac{\overline{P}_0}{\overline{M}_0 \sin \overline{e}_0}$ $\qquad$ $\overline{\Sigma}_0' = \dfrac{\overline{P}_0}{\overline{M}_0 \sin \overline{e}_0'}$ u. s. w.

$\overline{\Sigma}_1 = \dfrac{\overline{P}_1}{\overline{M}_1 \sin \overline{e}_1}$ $\qquad$ $\overline{\Sigma}_1' = \dfrac{\overline{P}_1}{\overline{M}_1 \sin \overline{e}_1'}$ u. s. w.

u. s. w.

8) $\overline{\Gamma}_0 = \frac{\sin \overline{e}_0}{\overline{M}_0}$ $\overline{\Gamma}_0' = \frac{\sin \overline{e}_0'}{\overline{M}}$ u. s. w.

$\overline{\Gamma}_1 = \frac{\sin \overline{e}_1}{\overline{M}_1}$ $\overline{\Gamma}_1' = \frac{\sin \overline{e}_1'}{\overline{M}_1}$ u. s. w.

u. s. w.

9) $\overline{\Phi}_0 = \overline{\Sigma}_0 \cos \overline{e}_0 = \overline{\Pi}_0 \operatorname{ctg} \overline{e}_0$ $\Phi_0' = \overline{\Pi}_0 \operatorname{ctg} e_0'$ u. s. w.

$\overline{\Phi}_1 = \overline{\Sigma}_1 \cos \overline{e}_1 = \overline{\Pi}_1 \operatorname{ctg} \overline{e}_1$ $\overline{\Phi}_1' = \overline{\Pi}_1 \operatorname{ctg} e_1'$ u. s. w.

u. s. w.

10) $\sin \overline{\varepsilon}_0 = \frac{\overline{P}_0}{\overline{C}_0}$ $\sin \overline{\varepsilon}_0' = \frac{\overline{P}_0}{\overline{C}_1'}$ u. s. w.

$\sin \overline{\varepsilon}_1 = \frac{\overline{P}_1}{\overline{C}_1}$ $\sin \overline{\varepsilon}_1' = \frac{\overline{P}_1}{\overline{C}_1'}$ u. s. w.

u. s. w.

11) $\cos \overline{\varepsilon}_0 = \frac{\overline{F}_0}{\overline{C}_0}$ $\cos \overline{\varepsilon}_0' = \frac{\overline{F}_0'}{\overline{C}_0'}$ u. s. w.

$\cos \overline{\varepsilon}_1 = \frac{\overline{F}_1}{\overline{C}_1}$ $\cos \overline{\varepsilon}_1' = \frac{\overline{F}_1'}{\overline{C}_1'}$ u. s. w.

u. s. w.

12) $\operatorname{tg} \overline{r}_0 = \frac{\overline{P}_0}{\sin \overline{e}_0}$ $\operatorname{tg} \overline{r}_0' = \frac{\overline{P}_0}{\sin \overline{e}_0'}$ u. s. w.

$\operatorname{tg} \overline{r}_1 = \frac{\overline{P}_1}{\sin \overline{e}_1}$ $\operatorname{tg} \overline{r}_1' = \frac{\overline{P}_1}{\sin \overline{e}_1'}$ u. s. w.

u. s. w.

13) $\operatorname{ctg} \overline{\varrho}_0 = \frac{\overline{P}_0}{\overline{S}_0}$ $\operatorname{ctg} \overline{\varrho}_0' = \frac{\overline{P}_0}{\overline{S}_0'}$ u. s. w.

$\operatorname{ctg} \overline{\varrho}_1 = \frac{\overline{P}_1}{\overline{S}_1}$ $\operatorname{ctg} \overline{\varrho}_1' = \frac{\overline{P}_1}{\overline{S}_1'}$ u. s. w.

(Nr. 1 und 2 aus 8. b und 9. b. Nr. 3, 4, 5 aus den Definitionen §. 63 und §. 69, Nr. 6 aus 12. a, die übrigen aus 68. a. b und 69. a. b.)

§. 214.

Wollen wir nun von diesem Eckensysteme der d_0, d_1, d_2, d_3 übergehen zu dem Eckensysteme des Tetraeders $\mathfrak{T}$, welches durch die auf den d_0 . . in ihren Endpuncten normal errichteten Ebnen $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ gebildet wird, so haben wir uns aus §. 11. 1, 2, 3 zu erinnern, dass der Strahlpunct K zu diesem Systeme verschiedene Lagen hat, je nachdem die Strahlen d_0 . . . ein Ekkensystem von der Art I. a oder II. a oder III. a bilden (§. 8), nämlich in dieser Weise:

1) Bilden die Strahlen d_0, d_1, d_2, d_3 ein System von vier Ecken um einen Punct (K), so liegt derselbe innerhalb des $\mathfrak{T}$, und bestrahlt dessen vier Innenecken. (Fig. 9.)

2) Bilden die Strahlen ein System II. a einer dreigetheilten Ecke, etwa in der Weise, dass d_0 die Ecke $d_1 d_2 d_3$ dreitheilt, so liegt K entweder in dem an $\triangle_0$ gelegenen Aussenraume, oder in der Scheitelecke der Gegenecke von $\triangle_0$. Er bestrahlt also entweder die Aussenecken an $\triangle_0$ und die gegenüberliegende innere Ecke O, oder die Scheitelecke von O und die drei Aussenkeilecken an den drei Kanten von O und der (erweiterten) Ebne $\triangle_0$ (im zweiten Falle die Scheitelecken von den im ersten Falle bestrahlten). (Fig. 11. Fig. 10.)

3) Bilden die vier Strahlen eine vierkantige Ecke, etwa in der Weise, dass d_0 und d_1, sowie d_2 und d_3 darin einander gegenüberliegende Kanten sind, so liegt K in einem der Aussenkeilräume des $\mathfrak{T}$, welche an die Kante von $\triangle_0$ und $\triangle_1$ (l) und an die Kante von $\triangle_2$ und $\triangle_3$ (u) stossen. K bestrahlt also dann entweder die Aussenkeilecken an der Kante l und die Nebenecken, welche durch die Verlängerungen von u gebildet werden, oder die Aussenkeilecken an der Kante u und die durch die beiderseitigen Verlängerungen von l gebildeten Nebenecken. (Fig. 12.) Sind aber in vierkantigen Ecke d_0 und d_2, d_1 und d_3 einander gegenüberliegende Kanten, so liegt K in einem der beiden Aussenkeilräume, die an die Kante von $\triangle_0$ und $\triangle_2$ (m) oder an die Kante von $\triangle_1$ und $\triangle_3$ (p) stossen und sind d_0 und d_3, d_1 und d_2 gegenüberliegende Kanten der vierkantigen Ecke, so liegt K in einem der Aussenkeilräume, welche an die Kante der $\triangle_0$ und $\triangle_3$ (n) und an die Kante der $\triangle_1$ und $\triangle_2$ (q) stossen.

§. 215.

Aus der nach §. 212 als bekannt vorauszusetzenden Art des Eckensystems der d_0 . . . lässt sich also der zum Tetraeder $\mathfrak{T}$ gehörige Raum (§. 9), in welchen der Strahlpunct K zu liegen kommt, so weit erkennen, dass er, wenn bei K das System I. a stattfindet, unzweifelhaft, wenn aber das System II. a oder III. a stattfindet, zwischen je zweien zweifelhaft ist. Es fragt sich, ob nicht aus den gegebenen Grössen $d_0, d_1, \ldots a, b, \ldots$ vollständig entschieden werden kann, welche Lage der Punct K zum $\mathfrak{T}$ haben muss.

Zunächst ist zu erinnern, dass, welche Lage auch der Punct K zum Tetraeder haben möge, er immer an jedem der Eckpuncte des $\mathfrak{T}$: O, A, B, C eine der acht Ecken bestrahlt, welche die drei darin sich schneidenden Tetraederebnen bilden. Diese je acht an einem Puncte liegenden Ecken haben aber einerlei Π-sinus, und da die von K bestrahlte Ecke einer der vier Ecken bei K conjugirt ist, so ist der gemeinsame Π-sinus von je acht Ecken gleich dem P-sinus einer der gegebenen Ecken bei K, d. h.: es ist immer:

$$\Pi_0 = \overline{P}_0,\ \Pi_1 = \overline{P}_1,\ \Pi_2 = \overline{P}_2,\ \Pi_3 = \overline{P}_3$$

Aus der Anschauung geht nun Folgendes hervor für ein Tetraeder, auf dessen vier Dreiecke $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ von irgend einem Puncte K die Normalen d_0, d_1, d_2, d_3 gefällt sind:

1) liegt K im Innern des $\mathfrak{T}$, so ist

$$3\,\mathfrak{T} = \Delta_0 d_0 + \Delta_1 d_1 + \Delta_2 d_2 + \Delta_3 d_3$$

2) liegt K im Nebenraume von

Δ_0, so ist $3\,\mathfrak{T} = -\Delta_0 d_0 + \Delta_1 d_1 + \Delta_2 d_2 + \Delta_3 d_3$

Δ_1, » » $3\,\mathfrak{T} = \Delta_0 d_0 - \Delta_1 d_1 + \Delta_2 d_2 + \Delta_3 d_3$

u. s. w.

3) liegt K in der Scheitelecke von

O, so ist $3\,\mathfrak{T} = \Delta_0 d_0 - \Delta_0 d_1 - \Delta_2 d_2 - \Delta_3 d_3$

A, » » $3\,\mathfrak{T} = -\Delta_0 d_0 + \Delta_1 d_1 - \Delta_2 d_2 - \Delta_3 d_3$

u. s. w.

4) liegt K in dem Aussenkeilraume von

$$\left.\begin{matrix} u \\ l \end{matrix}\right\} \text{ so ist } 3\,\mathfrak{T} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\left\{\triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 - \triangle_2 d_2 - \triangle_3 d_3\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} p \\ m \end{matrix}\right\} \text{ » » } 3\,\mathfrak{T} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\left\{\triangle_0 d_0 - \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 - \triangle_3 d_3\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} q \\ n \end{matrix}\right\} \text{ » » } 3\,\mathfrak{T} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\left\{\triangle_0 d_0 - \triangle_1 d_1 - \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3\right\}$$

Alle diese Gleichungen ergeben sich aus der Anschauung, wenn wir uns unter $\frac{1}{3}\triangle_0 d_0$, $\frac{1}{3}\triangle_1 d_1$, . . die Inhalte der Pyramiden denken, deren Grundflächen $\triangle_0$, $\triangle_1$, . . sind, und deren Gipfel sich im Puncte K vereinigen.

Wir fassen alle diese Gleichungen nach gewohnter Weise zusammen unter dem Symbole:

$$3\,\mathfrak{T} = [\triangle_0 d_0]$$

worin $\mathfrak{T}$ eine absolute Raumgrösse bedeutet, die nicht negativ gedacht werden kann.

In dem Tetranom $[\triangle_0 d_0]$ ist jedem Gliede das Zeichen + zu geben, dessen Factor $d_0 \ldots$ einer Normale angehört, die mit dem $\mathfrak{T}$ auf einerlei Seite der von ihr getroffenen Fläche liegt, dagegen das Zeichen — jedem Gliede, dessen Factor $d_0 \ldots$ einer Normale angehört, die mit $\mathfrak{T}$ auf entgegengesetzten Seiten der getroffenen Fläche liegt.

Nun ist nach 169:

$$\mathfrak{M} = \frac{\triangle_0}{\overline{\Pi}_0} = \frac{\triangle_1}{\overline{\Pi}_1} = \ldots = \frac{\triangle_0}{\overline{P}_0} = \frac{\triangle_1}{\overline{P}_1} = \ldots$$

Dividirt man damit die obige Collectivgleichung, so wird nach 180:

$$\frac{3\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = 2\,w = [\overline{P}_0 d_0] \qquad (428.)$$

worin $2\,w$ wieder eine absolute Länge bedeutet und nicht negativ genommen werden kann.

Lösen wir diese Collectivgleichung wieder in die einzelnen darin begriffenen auf und stellen alles Entscheidende zusammen, so bekommen wir die folgende allgemeine Regel für die Lage von K in Beziehung auf das durch die gegebenen d_0, d_1, d_2, d_3 und deren Winkel bestimmte $\mathfrak{T}$:

Ob K liege

1) im Innern des $\mathfrak{T}$

2) in einem Aussenraume oder einer Scheitelecke des $\mathfrak{T}$

3) in einem Aussenkeilraume des $\mathfrak{T}$,

entscheidet sich nach §. 214 aus der Art des gegebenen Eckensystemes der d_0, d_1, d_2, d_3, nämlich, jenachdem dieses ist von der Art I. a oder II. a oder III. a.

Im ersten Falle ist nichts weiter zu untersuchen.

Im zweiten Falle

liegt K		wenn positiv ist:
im Aussenraume v. $\triangle_0$ / in d. Scheitelecke v. O	$+$	$-\overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3$
	$-$	
im Aussenraume v. $\triangle_1$ / in d. Scheitelecke v. A	$+$	$\overline{P}_0 d_0 - \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3$
	$-$	
im Aussenraume v. $\triangle_2$ / in d. Scheitelecke v. B	$+$	$\overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 - \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3$
	$-$	
im Aussenraume v. $\triangle_3$ / in d. Scheitelecke v. C	$+$	$\overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 - \overline{P}_3 d_3$
	$-$	

Im dritten Falle liegt K im Aussenkeilraume

der Kante		wenn positiv ist
u / l	$+$	$\overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 - \overline{P}_2 d_2 - \overline{P}_3 d_3$
	$-$	
p / m	$+$	$\overline{P}_0 d_0 - \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 - \overline{P}_3 d_3$
	$-$	
q / n	$+$	$\overline{P}_0 d_0 - \overline{P}_1 d_1 - \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3$
	$-$	

§. 216.

Nunmehr können ohne Schwierigkeit aus den Seitenwinkeln a, b, c, a', b', c des gegebenen Eckensystems für jeden besonderen Fall die Flächenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ des zu berechnenden Tetraeders bestimmt werden.

I. Liegt K im Innern des $\mathfrak{T}$, so ist

$$\alpha = \pi - a \qquad \alpha' = \pi - a'$$
$$\beta = \pi - b \qquad \beta' = \pi - b'$$
$$\gamma = \pi - c \qquad \gamma' = \pi - c'$$

II. Für die beiden Lagen von K: in einem Aussenraume oder in der gegenüberliegenden Scheitelecke finden sich gleiche Werthe der Flächenwinkel des $\mathfrak{T}$. Nämlich für K im Aussenraume oder in der Scheitelecke bei

$\triangle_0$ resp. O:

$$\alpha = \pi - a \quad \alpha' = a'$$
$$\beta = \pi - b \quad \beta' = b'$$
$$\gamma = \pi - c \quad \gamma' = c'$$

$\triangle_1$ resp. A:

$$\alpha = \pi - a \quad \alpha' = a'$$
$$\beta = b \quad \beta' = \pi - b'$$
$$\gamma = c \quad \gamma' = \pi - c'$$

$\triangle_2$ resp. B:

$$\alpha = a \quad \alpha' = \pi - a'$$
$$\beta = \pi - b \quad \beta' = b'$$
$$\gamma = c \quad \gamma' = \pi - c'$$

$\triangle_3$ resp. C:

$$\alpha = a \quad \alpha' = \pi - a'$$
$$\beta = b \quad \beta' = \pi - b'$$
$$\gamma = \pi - c \quad \gamma' = c'$$

III. Für K in einem Aussenkeilraume bei

u oder l

$$\alpha = \pi - a \quad \alpha' = \pi - a'$$
$$\beta = b \quad \beta' = b'$$
$$\gamma = c \quad \gamma' = c'$$

p oder m

$$\alpha = a \quad \alpha' = a'$$
$$\beta = \pi - b \quad \beta' = \pi - b'$$
$$\gamma = c \quad \gamma' = c'$$

q oder n

$$\alpha = a \quad \alpha' = a'$$
$$\beta = b \quad \beta' = b'$$
$$\gamma = \pi - c \quad \gamma' = \pi - c'$$

§. 217.

Und daraus ergeben sich nun die Functionen der vier Ecken des $\mathfrak{T}$ und ihrer Nebenecken ausgedrückt durch die in §. 213 aufgeführten Functionen der Ecken der d_0, d_1, d_2, d_3.

Im Folgenden sind die Functionen der Ecken der d_0 . . . in die Functionen des zugehörigen $\mathfrak{T}$ übertragen, und zwar für die drei Fälle, dass

I. a die d_0, d_1, d_2, d_3 vier Ecken um einen Punct bilden.

II. a die $d_1 d_2 d_3$ eine durch d_0 dreigetheilte Ecke bilden.

III. a die d_0 . . . eine vierkantige Ecke in der Weise bilden, dass d_0 und d_1, so wie d_2 und d_3 darin einander gegenüberliegende Kanten sind.

Für alle drei Fälle ist zunächst

1) $\overline{P_0} = \Pi_0 \quad \overline{P_1} = \Pi_1 \quad \overline{P_2} = \Pi_2 \quad \overline{P_3} = \Pi_3$

2) $\overline{\Pi_0} = P_0 \quad \overline{\Pi_1} = P_1 \quad \overline{\Pi_2} = P_2 \quad \overline{\Pi_3} = P_3$

3) $\overline{M_0} = \frac{1}{M_0} \quad \overline{M_1} = \frac{1}{M_1} \quad \overline{M_2} = \frac{1}{M_2} \quad \overline{M_3} = \frac{1}{M_3}$

Die folgenden Gleichungen sind so zu verstehen, dass von den links des Gleichheitszeichens aufeinander folgenden Grössen jede gleich ist der gleichstelligen aus jeder der Gruppe, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen.

Aus §. 213. 6 und §. 216 unter Zuziehung der Tabellen 12. a. b und 13. a. b (in §. 4) ergiebt sich

für I. a für II. a für III. a

4) $$\left.\begin{matrix} \overline{e_0}\ \overline{e_0}'\ \overline{e_0}''\ \overline{e_0}''' \\ \overline{e_1}\ \overline{e_1}'\ \overline{e_1}''\ \overline{e_1}''' \\ \overline{e_2}\ \overline{e_2}'\ \overline{e_2}''\ \overline{e_2}''' \\ \overline{e_3}\ \overline{e_3}'\ \overline{e_3}''\ \overline{e_3}''' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \varepsilon_0\ \varepsilon_0'\ \varepsilon_0''\ \varepsilon_0''' & \varepsilon_0\ \varepsilon_0'\ \varepsilon_0''\ \varepsilon_0''' & \varepsilon_0'\ \varepsilon_0\ \varepsilon_0'''\ \varepsilon_0'' \\ \varepsilon_1\ \varepsilon_1'\ \varepsilon_1''\ \varepsilon_1''' & \varepsilon_1'\ \varepsilon_1\ \varepsilon_1'''\ \varepsilon_1'' & \varepsilon_1'\ \varepsilon_1\ \varepsilon_1'''\ \varepsilon_1'' \\ \varepsilon_2\ \varepsilon_2'\ \varepsilon_2''\ \varepsilon_2''' & \varepsilon_2''\ \varepsilon_2'''\ \varepsilon_2\ \varepsilon_2' & \varepsilon_2'\ \varepsilon_2\ \varepsilon_2'''\ \varepsilon_2'' \\ \varepsilon_3\ \varepsilon_3'\ \varepsilon_3''\ \varepsilon_3''' & \varepsilon_3'''\ \varepsilon_3''\ \varepsilon_3'\ \varepsilon_3 & \varepsilon_3'\ \varepsilon_3\ \varepsilon_3'''\ \varepsilon_3'' \end{matrix}\right.$$

5) $$\left.\begin{matrix} \overline{S_0}\ \overline{S_0}'\ . \ . \\ \overline{S_1}\ \overline{S_1}'\ . \ . \\ .\ .\ .\ . \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Gamma_0\ \Gamma_0'\ .\ . & \Gamma_0\ \Gamma_0'\ .\ . & \Gamma_0'\ \Gamma_0\ .\ . \\ \Gamma_1\ \Gamma_1'\ .\ . & \Gamma_1'\ \Gamma_1\ .\ . & \Gamma_1'\ \Gamma_1\ .\ . \\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . \end{matrix}\right.$$

6) $$\left.\begin{matrix} \overline{C_0}\ \overline{C_0}'\ . \ . \\ \overline{C_1}\ \overline{C_1}'\ . \ . \\ .\ .\ .\ . \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} S_0\ S_0'\ .\ . & S_0\ S_0'\ .\ . & S_0'\ S_0\ .\ . \\ S_1\ S_1'\ .\ . & S_1'\ S_1\ .\ . & S_1'\ S_1\ .\ . \\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . \end{matrix}\right.$$

7) $$\left.\begin{matrix} \overline{F_0}\ \overline{F_0}'\ . \ . \\ \overline{F_1}\ \overline{F_1}'\ . \ . \\ .\ .\ .\ . \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Phi_0\ \Phi_0'\ .\ . & \Phi_0\ \Phi_0'\ .\ . & \Phi_0'\ \Phi_0\ .\ . \\ \Phi_1\ \Phi_1'\ .\ . & \Phi_1'\ \Phi_1\ .\ . & \Phi_1'\ \Phi_1\ .\ . \\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . \end{matrix}\right.$$

Ferner nach 68. a. b, weil $\operatorname{tg} \overline{r_0} = \frac{\overline{P_0}}{\sin \overline{e_0}} = \frac{\Pi_0}{\sin \varepsilon_0} = \operatorname{ctg} \varrho_0$

u. s. w.

8) $$\left.\begin{matrix} \operatorname{tg}\overline{r_0}\ \operatorname{tg}\overline{r_0}'\ . \ . \\ \operatorname{tg}\overline{r_1}\ \operatorname{tg}\overline{r_1}'\ . \ . \\ .\ .\ .\ . \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \operatorname{ctg}\varrho_0\ \operatorname{ctg}\varrho_0'\ .\ . & \operatorname{ctg}\varrho_0\ \operatorname{ctg}\varrho_0'\ .\ . & \operatorname{ctg}\varrho_0'\ \operatorname{ctg}\varrho_0\ .\ . \\ \operatorname{ctg}\varrho_1\ \operatorname{ctg}\varrho_1'\ .\ . & \operatorname{ctg}\varrho_1'\ \operatorname{ctg}\varrho_1\ .\ . & \operatorname{ctg}\varrho_1'\ \operatorname{ctg}\varrho_1\ .\ . \\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . \end{matrix}\right.$$

Daraus sind dann wieder vermöge der Tabellen 12. a. b. 13. a. b. 68. a. b die folgenden Gleichungen herzuleiten:

$$9)\quad \left.\begin{matrix} \overline{\varepsilon}_0 & \overline{\varepsilon}_0' & \ldots \\ \overline{\varepsilon}_1 & \overline{\varepsilon}_1' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} e_0 & e_0' & \ldots & e_0 & e_0' & \ldots & e_0' & e_0 & \ldots \\ e_1 & e_1' & \ldots & e_1' & e_1 & \ldots & e_1' & e_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

$$10)\quad \left.\begin{matrix} \overline{\Sigma}_0 & \overline{\Sigma}_0' & \ldots \\ \overline{\Sigma}_1 & \overline{\Sigma}_1' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} C_0 & C_0' & \ldots & C_0 & C_0' & \ldots & C_0' & C_0 & \ldots \\ C_1 & C_1' & \ldots & C_1' & C_1 & \ldots & C_1' & C_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

$$11)\quad \left.\begin{matrix} \overline{\Gamma}_0 & \overline{\Gamma}_0' & \ldots \\ \overline{\Gamma}_1 & \overline{\Gamma}_1' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} S_0 & S_0' & \ldots & S_0 & S_0' & \ldots & S_0' & S_0 & \ldots \\ S_1 & S_1' & \ldots & S_1' & S_1 & \ldots & S_1' & S_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

$$12)\quad \left.\begin{matrix} \overline{\Phi}_0 & \overline{\Phi}_0' & \ldots \\ \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_1' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} F_0 & F_0' & \ldots & F_0 & F_0' & \ldots & F_0' & F_0 & \ldots \\ F_1 & F_1' & \ldots & F_1' & F_1 & \ldots & F_1' & F_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

$$13)\quad \left.\begin{matrix} \operatorname{ctg}\overline{\varrho}_0 & \operatorname{ctg}\overline{\varrho}_0' & \ldots \\ \operatorname{ctg}\overline{\varrho}_1 & \operatorname{ctg}\overline{\varrho}_1' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} = \left|\begin{matrix} \operatorname{tg} r_0 & \operatorname{tg} r_0' & \ldots & \operatorname{tg} r_0 & \operatorname{tg} r_0' & \ldots & \operatorname{tg} r_0' & \operatorname{tg} r_0 & \ldots \\ \operatorname{tg} r_1 & \operatorname{tg} r_1' & \ldots & \operatorname{tg} r_1' & \operatorname{tg} r_1 & \ldots & \operatorname{tg} r_1' & \operatorname{tg} r_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

Alle diese Gruppen von je vier Gliedern sind in der Weise bis zu 16 Gliedern vervollständigt zu denken, dass die je 12 fehlenden Glieder dieselben oberen und unteren Indices bekommen, welche die gleichstelligen ausgeschriebenen Glieder in Nr. 4 haben.

§. 218.

Die Entfernungen der Eckpuncte des $\mathfrak{T}$ vom Strahlpuncte K: r_0, r_1, r_2, r_3, sind nach 158:

$$\begin{aligned} 4\,\overline{P}_0^2\, r_0^2 = \quad & d_1^2 \sin^2 a - 2\,d_2 d_3\,(\cos a - \cos b \cos c) \\ & + d_2^2 \sin^2 b - 2\,d_1 d_3\,(\cos b - \cos a \cos c) \\ & + d_3^2 \sin^2 c - 2\,d_1 d_2\,(\cos c - \cos a \cos c) \end{aligned} \qquad (429.)$$

$$\begin{aligned} 4\,\overline{P}_1^2\, r_1^2 = \quad & d_0^2 \sin^2 a - 2\,d_2 d_3\,(\cos a - \cos b' \cos c') \\ & + d_3^2 \sin^2 b' - 2\,d_0 d_2\,(\cos b' - \cos a \cos c') \\ & + d_2^2 \sin^2 c' - 2\,d_0 d_3\,(\cos c' - \cos a \cos b') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4\,\bar{P}_2^2\, r_2^2 = \quad & d_3^2 \sin^2 a' - 2\,d_0 d_1\,(\cos a' - \cos b \cos c') \\
& + d_0^2 \sin^2 b - 2\,d_1 d_3\,(\cos b - \cos a' \cos c') \\
& + d_1^2 \sin^2 c' - 2\,d_0 d_3\,(\cos c' - \cos a' \cos b) \\
4\,\overline{P}_3^2\, r_3^2 = \quad & d_2^2 \sin^2 a' - 2\,d_0 d_1\,(\cos a' - \cos b' \cos c) \\
& + d_1^2 \sin^2 b' - 2\,d_0 d_2\,(\cos b' - \cos a' \cos c) \\
& + d_0^2 \sin^2 c - 2\,d_1 d_2\,(\cos c - \cos a' \cos b')
\end{aligned}
$$

und die Abschnitte der Tetraederkanten, in welche diese durch die Ebnen der d_0, d_1, d_2, d_3 zerlegt werden, nach 157.*) a:

$$
\begin{aligned}
2\,\overline{P}_0 \sin a \;.\; u_0 &= d_1 \sin^2 a - d_2\,(\cos c - \cos a \cos b) \\
&\quad - d_3\,(\cos b - \cos a \cos c) \qquad (430.) \\
2\,\overline{P}_1 \sin a \;.\; u_1 &= d_0 \sin^2 a - d_2\,(\cos b' - \cos a \cos c') \\
&\quad - d_3\,(\cos c' - \cos a \cos b') \\
2\,\overline{P}_0 \sin b \;.\; p_0 &= d_2^2 \sin^2 b - d_1\,(\cos c - \cos a \cos b) \\
&\quad - d_3\,(\cos a - \cos b \cos c) \\
2\,\overline{P}_2 \sin b \;.\; p_2 &= d_0 \sin^2 b - d_1\,(\cos a' - \cos b \cos c') \\
&\quad - d_3\,(\cos c' - \cos a' \cos b) \\
2\,\overline{P}_0 \sin c \;.\; q_0 &= d_3 \sin^2 c - d_1\,(\cos b - \cos a \cos c) \\
&\quad - d_2\,(\cos a - \cos b \cos c) \\
2\,\overline{P}_3 \sin c \;.\; q_3 &= d_0 \sin^2 c - d_1\,(\cos a' - \cos b' \cos c) \\
&\quad - d_2\,(\cos b' - \cos a' \cos c) \\
2\,\overline{P}_2 \sin a' \;.\; l_2 &= d_3 \sin^2 a' - d_0\,(\cos c' - \cos a' \cos b) \\
&\quad - d_1\,(\cos b - \cos a' \cos c') \\
2\,\overline{P}_3 \sin a' \;.\; l_3 &= d_2 \sin^2 a' - d_0\,(\cos b' - \cos a' \cos c) \\
&\quad - d_1\,(\cos c - \cos a' \cos b') \\
2\,\overline{P}_1 \sin b' \;.\; m_1 &= d_3 \sin^2 b' - d_0\,(\cos c' - \cos a \cos b') \\
&\quad - d_2\,(\cos a - \cos b' \cos c') \\
2\,\overline{P}_3 \sin b' \;.\; m_3 &= d_1 \sin^2 b' - d_0\,(\cos a' - \cos b' \cos c) \\
&\quad - d_2\,(\cos c - \cos a' \cos b') \\
2\,\overline{P}_1 \sin c' \;.\; n_1 &= d_2 \sin^2 c' - d_0\,(\cos b' - \cos a \cos c') \\
&\quad - d_3\,(\cos a - \cos b' \cos c') \\
2\,\overline{P}_2 \sin c' \;.\; n_2 &= d_1 \sin^2 c' - d_0\,(\cos a' - \cos b \cos c') \\
&\quad - d_3\,(\cos b - \cos a' \cos c')
\end{aligned}
$$

§. 219.

In sofern man die Flächenwinkel der Ecken bei K als durch die Seitenwinkel gegeben betrachten kann, lassen sich die letzten Gleichungen dadurch umgestalten, dass man $\sin a \sin b \cos \gamma$ für $\cos c - \cos a \cos b$ setzt u. s. w., wodurch z. B. die beiden ersten dieser Gleichungen durch $\sin a$ theilbar werden und diese Gestalt bekommen:

$$2\,\overline{P}_0\,u_0 = d_1 \sin a - d_2 \sin b \cos \gamma_0 - d_3 \sin c \cos \beta_0$$
$$2\,\overline{P}_1\,u_1 = d_0 \sin a - d_2 \sin c' \cos \beta_1 - d_3 \sin b' \cos \gamma_1$$

Addirt man diese beiden Gleichungen (für den Fall I. a), nachdem man die erste mit $2\,\overline{P}_1$, die zweite mit $2\,\overline{P}_0$ multiplicirt hat, so wird wegen $u_0 + u_1 = u$:

$$4\,\overline{P}_0\,\overline{P}_1\,u = 2\,(\overline{P}_0\,d_0 + \overline{P}_1\,d_1)\sin a$$
$$- d_2\,(2\,P_1 \sin b \cos \gamma_0 + 2\,P_0 \sin c' \cos \beta_1)$$
$$- d_3\,(2\,P_1 \sin c \cos \beta_0 + 2\,P_0 \sin b' \cos \gamma_1)$$

Nun ist $2\,P_1 \sin b \cos \gamma_0 + 2\,P_0 \sin c' \cos \beta_1 =$
$\sin a \sin c' \sin \beta_1 \sin b \cos \gamma_0 + \sin a \sin b \sin \gamma_0 \sin c' \cos \beta_1$
$= \sin a \sin b \sin c' \sin (\beta_1 + \gamma_0)$, (weil $\beta_1 + \gamma_0 = 2\pi - \alpha_2$)
$= - \sin a \sin b \sin c' \sin \alpha_2 = - 2\,\overline{P}_2 \sin a$

und ebenso ist der Coefficient von $-d_3$: $-2\,\overline{P}_3 \sin a$, also ist

$$\frac{2\,\overline{P}_0\,\overline{P}_1\,u}{\sin a} = \overline{P}_0 d_0 + \overline{P}_1 d_1 + \overline{P}_2 d_2 + \overline{P}_3 d_3 = 2\,w \qquad (431.)$$

ein Resultat, das uns in anderer Form unter 187 schon auf ganz anderem Wege begegnet ist.

In §. 215 ist nun schon auseinandergesetzt worden, wie in dem Tetranom $2\,w = [P_0 d_0]$ die Vorzeichen der einzelnen Glieder je nach der Art des Eckensystemes der d_0, d_1, d_2, d_3 zu setzen sind. Da also $2\,w$ für jeden Fall eine bekannte Grösse ist, so haben wir diese Ausdrücke für die Kanten des $\mathfrak{T}$:

$$u = \frac{w \sin a}{\overline{P}_0\,\overline{P}_1} \qquad p = \frac{w \sin b}{\overline{P}_0\,\overline{P}_2} \qquad q = \frac{w \sin c}{\overline{P}_0\,\overline{P}_3} \qquad (432.)$$
$$l = \frac{w \sin a'}{\overline{P}_2\,\overline{P}_3} \qquad m = \frac{w \sin b'}{\overline{P}_1\,\overline{P}_3} \qquad u = \frac{w \sin c'}{\overline{P}_1\,\overline{P}_2}$$

§. 220.

In der Summe $[\overline{P}_0 d_0] = 2w$, so wie in der: $[\triangle_0 d_0] = 3\mathfrak{T}$ bestimmen sich also die Vorzeichen je nach der Lage des Punctes K gegen das $\mathfrak{T}$. Jedes d_0, d_1 . ., welches von der zugehörigen Tetraederfläche aus auf einerlei Seite mit $\mathfrak{T}$ liegt, ist in dieser Summe positiv, jedes mit $\mathfrak{T}$ auf entgegengesetzten Seiten der zugehörigen Tetraederfläche liegende negativ. — Ist K' ein zweiter Strahlpunct, von dem aus die Normalen d_0', d_1' d_2' d_3' auf die Tetraederflächen gefällt sind, so ist auch $[\overline{P}_0 d_0'] = 2w$ und $[\triangle_0 d_0'] = 3\mathfrak{T}$, aber die Vorzeichen der einzelnen Glieder in diesen letzteren Summen sind nicht dieselben, wie in den vorigen, wenn K' in einem anderen der 15 Tetraederräume (§. 9) liegt, als K.

Nehmen wir K' im Centrum einer der acht Berührungskugeln, deren Radius mit d bezeichnet werde, so ist $[\overline{P}_0]\, d = 2w$ und $[\triangle_0]\, d = 3\mathfrak{T}$, worin aber die Vorzeichen der einzelnen Glieder von $[\overline{P}_0]$ und von $[\triangle_0]$ von der Lage des ursprünglichen Strahlpunctes K durchaus unabhängig sind. Die Summenzeichen also mit dieser gegenseitigen Unabhängigkeit verstanden, haben wir

$$[\overline{P}_0 d_0] = [\overline{P}_0]\, d \text{ also}$$

$$d = \frac{[\overline{P}_0 d_0]}{[\overline{P}_0]} = \frac{2w}{[\overline{P}_0]} \qquad (433.)$$

Bedeutet z. B. d den Radius der dem $\mathfrak{T}$ eingeschriebenen Kugel, so ist

$$[\overline{P}_0] = \overline{P}_0 + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3$$

und da $2w$ oder $[\overline{P}_0 d_0]$ nun für jedes Eckensystem, welches die d_0, d_1 . . bei K bilden mögen, bekannt ist, da also auch d bekannt ist, und da in §. 216 die Flächenwinkel des Tetraeders für jedes jener Eckensysteme angegeben sind: so können wir von hier an die Aufgabe, in sofern die noch zu suchenden Grössen keine Beziehung zum Puncte K haben, sondern nur vom Tetraeder $\mathfrak{T}$ abhängig sind, als reducirt betrachten auf diese:

Das Tetraeder zu berechnen aus dem Radius der eingeschriebenen Kugel und den sechs Flächenwinkeln (oder den sechs Winkeln der vier Berührungsradien).

Dies läuft auf dasselbe hinaus, als wenn die an der Spitze dieses Capitels stehende Aufgabe auf den Fall beschränkt würde, dass das gegebene Eckensystem der d_0, d_1, d_2, d_3 von der Art I. a sei, in welchem Falle die Flächenwinkel $\alpha, \beta, .$ die Supplemente der gegebenen Winkel $a, b, . .$ sind, die Berührungsradien der eingeschriebenen Kugel dieselben Winkel $a, b, . .$ mit einander bilden, und die gemeinsame Länge dieser Radien durch die Gleichung

$$(\overline{P}_0 + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3)\, d = P_0 d_0 + P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3$$

gegeben ist. Die soeben ausgesprochene Aufgabe ist nun nicht mehr als eine beschränkte anzusehen, nachdem in §. 216 und §. 217 die Flächenwinkel und die Functionen der Ecken des $\mathfrak{T}$, und in diesem §. 220 der Radius der eingeschriebenen Kugel durch beliebig gegebene Längen und Winkel der d_0, d_1, d_2, d_3 ausgedrückt sind.

§. 221.

Hierbei mag noch einmal daran erinnert werden, dass für diese Aufgabe nur fünf von den Flächenwinkeln des $\mathfrak{T}$ gegeben werden können, weil zwischen den sechs Winkeln die Gleichung 34. b besteht, also durch fünf derselben der sechste bestimmt ist. Sind z. B. die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$ gegeben, so wird α' gefunden durch die Gleichung 32. b:

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\begin{array}{l} 4\,\Pi_0\Pi_1 - \cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma \\ -\cos\alpha\,(\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \end{array}\right\}$$

in welcher Π_2 und Π_1 ohne α' ausdrückbar sind.

Verstehen wir also von jetzt an unter K denjenigen Punct innerhalb des $\mathfrak{T}$, für welchen

$$d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d \quad \text{und}$$
$$a = \pi - \alpha \quad b = \pi - \beta \quad c = \pi - \gamma$$
$$a' = \pi - \alpha' \quad b' = \pi - \beta' \quad c' = \pi - \gamma' \text{ ist,}$$

so wird die erste Gleichung für $KO = r_0$ in §. 218:

$$4\,\overline{P}_0^2\, r_0^2 = d^2 \left\{\begin{array}{l} \sin^2 a - 2(\cos a - \cos b\cos c) \\ +\sin^2 b - 2(\cos b - \cos a\cos c) \\ +\sin^2 c - 2(\cos c - \cos c\cos b) \end{array}\right\}$$

oder:

$$4\,\Pi_0^2 r_0^2 = d^2 \begin{cases} \sin^2\alpha + 2\,(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) \\ +\sin^2\beta + 2\,(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma) \\ +\sin^2\gamma + 2\,(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) \end{cases}$$

d. h. nach 60. a. b

$$r_0^2 = \frac{d^2}{\cos^2\overline{\varrho_0}},\quad r_0\cos\overline{\varrho_0} = d \qquad (434.\ a)$$

$$r_0^2 = \frac{d^2}{\sin^2 r_0},\quad r_0\sin r_0 = d^*) \qquad (b)$$

Also ist r_0 die Axe sowohl des der Ecke $d_1\,d_2\,d_3$ **) umschriebenen, als des der Ecke O eingeschriebenen Kegels, woraus die beiden Sätze folgen:

In jedem Tetraeder treffen die Axen der vier den Ecken eingeschriebenen Kegel im Mittelpuncte der eingeschriebenen Kugel zusammen.

Die Ebnen, welche die einem Tetraeder umschriebene Kugel an den vier Eckpuncten berühren, treffen in den Axen der den Centralecken umschriebenen Kegel zusammen.

Nach der zweiten Gruppe der Gleichungen des §. 218 wird für $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d$:

$$2\,\overline{P}_0 \sin a \cdot u_0 = d\,(\sin^2 a - (1-\cos a)\,(\cos b + \cos c))$$
$$= d\,(1-\cos a)\,(1+\cos a - \cos b - \cos c)$$

also nach 84. a:

$$\overline{P}_0\,u_0 = d\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a\,\overline{F}_0'\ \text{ oder auch}$$
$$\Pi_0\,u_0 = d\,\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\Phi_0'$$

Setzen wir hierin nach 68 und 102:

$$\frac{\overline{F}_0}{\overline{P}_0} = \mathrm{ctg}\,\overline{\varepsilon}_0'\quad \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a = \sin\overline{\varepsilon}'\,\mathrm{tg}\,\overline{\varrho}_0$$

$$\frac{\Phi_0'}{\Pi_0} = \mathrm{ctg}\,e_0'\quad \mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sin e'\,\mathrm{ctg}\,r_0$$

so wird

$$u_0 = d\cos\overline{\varepsilon}'\,\mathrm{tg}\,\overline{\varrho}_0 = d\cos e'\,\mathrm{ctg}\,r_0 \qquad (435.)$$

---

*) Dass die Länge r_0 und der Winkel r_0 hier unter einerlei Zeichen so dicht bei einander stehen, wird ja wohl Niemanden stören.

**) Durch die Indices werden hier die d nur der Lage, nicht der Grösse nach unterschieden.

§. 222.

Diese Resultate lassen sich auch auf geometrischem Wege (ohne Zuziehung der allgemeineren Formeln für r_0 und u_0) ableiten.

(Fig. 81). Denn wegen $d_1 = d_2 = d_3$ sind die rechtwinkligen Dreiecke KOD_1, KOD_2, KOD_3 congruent, und daher

$$\angle\, OKD_1 = \angle\, OKD_2 = \angle\, OKD_3 = \overline{\varrho_0} \text{ also } d = r_0 \cos \overline{\varrho_0}$$
$$\angle\, KOD_1 = \angle\, KOD_2 = \angle\, KOD_3 = r_0 \text{ also } d = r_0 \sin r_0$$

Ferner sind nach §. 74 (Fig. 73) die Flächenwinkel, welche in einer Ecke die Ebnen der ϱ mit den Seitenflächen machen, $\sigma - \alpha$, $\sigma - \beta$, $\sigma - \gamma$; demnach sind in der Ecke $d_1 d_2 d_3$ (Fig. 81) die Flächenwinkel $(r_0 d_3,\ d_3 d_2) = \overline{\sigma_0} - \alpha_0$ u. s. w., d. h.:

$$\angle\, OD_2 U = \angle\, OD_3 U = \overline{\sigma_0} - \alpha_0 = \tfrac{1}{2}\pi - \overline{\varepsilon_0}', \text{ also}$$
$$OU = KD_2 \operatorname{tg} OKD_2 \sin OD_2 U = d \operatorname{tg} \overline{\varrho_0} \cos \overline{\varepsilon_0}'$$

und gleichfalls nach §. 74 (Fig. 72 übertragen auf Fig. 81) ist

$$\angle\, UOD_2 = UOD_3 = s_0 - a_0 = e_0', \text{ also}$$
$$OU = KD_2 \operatorname{ctg} KOD_2 \cos UOD_2 = d \operatorname{ctg} r_0 \cos e_0'$$

Die geometrische Betrachtung ergiebt ferner Folgendes: Da KD_2 normal auf $\triangle_2$, KD_3 auf $\triangle_3$ steht, so ist OA oder u, und also auch die Ebne OKA normal auf der Ebne $KD_2\, UD_3$, und da $KD_2 = KD_3$, $UD_2 = UD_3$ ist, so steht die Diagonale $D_2 D_3$ normal auf KU, d. h. auf dem Durchschnitte der Ebnen $KD_2\, UD_3$ und OKA, also auch normal auf der letztern Ebne. So folgt, dass die sechs Verbindungslinien der vier Puncte D_0, D_1, D_2 D_3, d. h. die Kanten des Tetraeders $D_0 D_1 D_2 D_3$, welches wir mit T bezeichnen wollen, auf den sechs Ebnen der r_0, r_1, r_2, r_3 normal stehen, also die vier Ecken der r_0, r_1, r_2, r_3 den Ecken des T conjugirt sind. Dieses Tetraeder T ist nun gegeben durch den Radius d der ihm umschriebenen Kugel und die Winkel a, b, c, a', b', c' der vier nach den Eckpuncten gezogenen Radien derselben, kann also aus diesen Bestimmungsgrössen nach denselben Formeln berechnet werden, nach welchen im vorigen Capitel das $\mathfrak{T}$ aus r und den Winkeln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ berechnet worden ist. Dabei sind nun hier die r_0, r_1, r_2, r_3 die Axen der den Centralecken des T (den Ecken der d_0 . .) umschriebenen

Kegel, so wie im vorigen Capitel umgekehrt die d_0, d_1, d_2, d_3 die Axen der den Centralecken des $\mathfrak{T}$ (den Ecken der r_0 . .) umschriebenen Kegel waren. Wir können also hier alle Formeln des vorigen Capitels, die sich auf die beiden Eckensysteme um K beziehen, auf das Tetraeder $D_0 D_1 D_2 D_3$ oder T anwenden, indem wir die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ und die davon abhängenden Eckenfunctionen mit den a, b, c, a', b', c' und den gleichen Functionen ihrer Ecken gegenseitig vertauschen.

§. 223.

Demnach folgt aus §. 206

$$2)\quad \sin D_2 D_0 D_3 = \sin \mathfrak{A}_0 = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \overline{\varrho_1}}$$

$$\sin \mathfrak{B}_0 = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\sin \overline{\varrho_2}}$$

$$\sin \mathfrak{C}_0 = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\sin \overline{\varrho_3}}$$

$$2)\quad \cos \mathfrak{A}_0 = \cos \tfrac{1}{2} a \cos \varepsilon_1' = \frac{1 + \cos a - \cos b' - \cos c'}{2 \sin \frac{1}{2} b' \sin \frac{1}{2} c'}$$

$$\cos \mathfrak{B}_0 = \cos \tfrac{1}{2} b \cos \varepsilon_2'' = \frac{1 - \cos a' + \cos b - \cos c'}{2 \sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} c'}$$

$$\cos \mathfrak{C}_0 = \cos \tfrac{1}{2} c \cos \varepsilon_3''' = \frac{1 - \cos a' - \cos b' + \cos c}{2 \sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} b'}$$

wonach dann auch die Functionen der anderen Flächenwinkel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ . . $\mathfrak{A}_2$ . . leicht nachgebildet werden,

$$3)\quad P(D_0) = \overline{\overline{\Pi}}_0 = \frac{[\overline{P}_0]}{8 \sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} b' \sin \frac{1}{2} c'}$$

(wo (D_0) die Ecke des T bei D_0 bedeutet).

$$4)\quad M(D_0) = \frac{1}{\overline{\overline{M}}_0} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} b' \sin \frac{1}{2} c' \overline{S}_0}{[\overline{P}_0] \sin \overline{\varrho_1} \sin \overline{\varrho_2} \sin \overline{\varrho_3}}$$

$$5)\quad \Pi(D_0) = \overline{\overline{P}}_0 = \frac{[\overline{P}_0]^2 \sin \overline{\varrho_1} \sin \overline{\varrho_2} \sin \overline{\varrho_3}}{16 \sin^2 \frac{1}{2} a' \sin^2 \frac{1}{2} b' \sin^2 \frac{1}{2} c' \overline{S}_0}$$

§. 224.

Den Modulus $\frac{P_0}{\overline{\overline{S_0}}} = \frac{[\overline{\overline{P_0}}]}{4\sqrt{(\overline{\overline{S_0}})}} = \overline{\overline{\mathfrak{W}}}$ (Nr. 408 in §. 207) können wir auch schreiben $\frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\overline{\overline{S_0}}}$, indem wir für den P-sinus der Tetraederecke O den Π-sinus ihrer Polarecke $d_1 d_2 d_3$ einführen. Er erscheint dann als Modulus nicht sowohl des Tetraeders $\mathfrak{T}$, als vielmehr zweier am Puncte K verbundener Eckensysteme: der Ecken von vier beliebig gegebenen Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3 und der Ecken von den Axen d_0, d_1, d_2, d_3 der ihnen umschriebenen Kegel.

Da wir nun jetzt das Eckensystem der beliebig gegebenen d_0, d_1, d_2, d_3 zu betrachten haben, für welches r_0, r_1, r_2, r_3 die Axen der umschriebenen Kegel sind, so haben wir nach 408:

$$\frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\overline{S_0}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_1}}}{\overline{S_1}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_2}}}{\overline{S_2}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_3}}}{\overline{S_3}} = \frac{[\overline{P_0}]}{4\sqrt{(\overline{S_0})}} = \overline{\mathfrak{W}} \qquad (436.)$$

worin das Zeichen $\overline{\mathfrak{W}}$ dasselbe für das Eckensystem der $d_0 \ldots$ bezeichnet, was in 408 das Zeichen $\overline{\overline{\mathfrak{W}}}$ für das Eckensystem der $r_0 \ldots$ Demnach ist

$$\text{nach 410:} \quad \overline{\mathfrak{W}} = \frac{4\sqrt{(\overline{\overline{\Pi_0}})}}{[\overline{P_0}]} \qquad (437.)$$

$$\text{nach 411:} \quad \overline{\mathfrak{W}}\sqrt{(\overline{S})} = \frac{\sqrt{(\overline{\overline{\Pi_0}})}}{\overline{\mathfrak{W}}} = \tfrac{1}{4}[\overline{P_0}] \qquad (438.)$$

$$\text{nach 412:} \quad \overline{\mathfrak{W}} = \frac{\overline{\overline{\Pi_0}}}{\overline{P_0}\,\mathrm{tg}\,\overline{\varrho_0}} = \frac{\overline{\overline{\Sigma_0}}\,\mathrm{tg}\,r_0}{\overline{S_0}} \qquad (439.)$$

§. 225.

Dadurch bekommen dann wieder die Ausdrücke des §. 223 folgende Formen (vergl. §. 208):

$$3) \quad \overline{\overline{\Pi_0}} = \overline{\mathfrak{W}}\,\overline{S_0} = \frac{[\overline{P_0}]\,\overline{S_0}}{4\sqrt{(\overline{S_0})}}$$

$$4)\quad \frac{1}{\overline{M}_0} = \frac{1}{4\,\mathfrak{W}\sin\overline{\varrho}_1\sin\overline{\varrho}_2\sin\overline{\varrho}_3} = \frac{\sqrt{(\overline{S}_0)}}{[\overline{P}_0]\sin\overline{\varrho}_1\sin\overline{\varrho}_2\sin\overline{\varrho}_3}$$

$$5)\quad \overline{P} = \tfrac{1}{4}[\overline{P}_0]^2\,\frac{\sin\overline{\varrho}_1}{\overline{S}_1}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_2}{\overline{S}_2}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_3}{\overline{S}_3} = \tfrac{1}{4}[\overline{P}_0]^2\frac{\cos\overline{\varrho}_1}{\overline{P}_1}\,\frac{\cos\overline{\varrho}_2}{\overline{P}_2}\,\frac{\cos\overline{\varrho}_3}{\overline{P}_3}$$

$$6)\quad \sin\mathfrak{a} = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_2}{\overline{S}_2}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_3}{\overline{S}_3}\sin\tfrac{1}{2}a'$$

$$\sin\mathfrak{b} = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_1}{\overline{S}_1}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_3}{\overline{S}_3}\sin\tfrac{1}{2}b'$$

$$\sin\mathfrak{c} = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_1}{\overline{S}_1}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_2}{\overline{S}_2}\sin\tfrac{1}{2}c'$$

$$\sin\mathfrak{a}' = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_0}{\overline{S}_0}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_1}{\overline{S}_1}\sin\tfrac{1}{2}a$$

$$\sin\mathfrak{b}' = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_0}{\overline{S}_0}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_2}{\overline{S}_2}\sin\tfrac{1}{2}b$$

$$\sin\mathfrak{c}' = [\overline{P}_0]\,\frac{\sin\overline{\varrho}_0}{\overline{S}_2}\,\frac{\sin\overline{\varrho}_3}{\overline{S}_3}\sin\tfrac{1}{2}c$$

Endlich ist auch nach 406

$$7)\quad \cos(d_0 r_0) = -(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3)\frac{\cos\overline{\varrho}}{\overline{P}_0}$$

$$= -(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3)\frac{\sin\overline{\varrho}_0}{\overline{S}_0}$$

§. 226.

Es sind noch die wichtigsten Moduli des Tetraeders $\mathfrak{T}$ durch den Radius d der eingeschriebenen Kugel und die Winkel $a, b, \ldots$ der Berührungsradien auszudrücken.

Von diesen haben wir schon aus §. 219:

$$1)\quad 2w = [\overline{P}_0]d \qquad (431.)$$

Ferner aus 432:

$$ul = \frac{w^2}{(\overline{P}_0)}\sin a\sin a' = \frac{w^2}{(\overline{P}_0)}\sin\alpha\sin\alpha'$$

also nach 191:

$$2)\ \mathfrak{M} = \frac{[\overline{P}_0]^2\, d^2}{4\,(\overline{P}_0)} = \frac{w^2}{(\overline{P}_0)} \qquad (440.)$$

also nach 180:

$$3)\ 3\,\mathfrak{T} = 2\,w\,\mathfrak{M} = \frac{[\overline{P}_0]^3\, d^3}{4\,(\overline{P}_0)} \qquad (441.)$$

Aus $P_0 = \overline{\Pi}_0 = \dfrac{2\,\overline{P}_0^2}{\sin a \sin b \sin c} = \dfrac{\overline{P}_0^2}{\overline{S}_0\ \overline{C}_0}$ folgt:

$$4)\ \sqrt{}\,(P_0) = \frac{(\overline{P}_0)}{\sqrt{}\,(\overline{S}_0)\,\sqrt{}\,(\overline{C}_0)} = \sqrt{}\,(\overline{\Pi}_0) \qquad (442.)$$

und daraus nach 206

$$5)\ \mu = \frac{w}{\sqrt{}\,(P_0)} = \frac{[\overline{P}_0]\,d}{\sqrt{}\,(\overline{\Pi}_0)} \qquad (443.)$$

Daraus wieder nach 210:

$$6)\ \mathfrak{D} = 2\,\mu\,\mathfrak{M} = \frac{\sqrt{}\,(\overline{S}_0)\,\sqrt{}\,(\overline{C}_0)\,[\overline{P}_0]^3\, d^3}{2\,(\overline{P}_0)^2} \qquad (444.)$$

Ferner ist nach 180:

$$h_0 = \frac{2\,w}{P_0} = \frac{[\overline{P}_0]\,d}{\overline{P}_0} \text{ u. s. w., also} \qquad (445.)$$

$$7)\ (h_0) = \frac{[\overline{P}_0]^4\, d^4}{(\overline{P}_0)} \qquad (446.)$$

Aus dem Werthe für h_0 ergiebt sich noch:

$$\triangle_0 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{h_0} = \frac{[\overline{P}_0]^2\, d^2}{\overline{P}_1\,\overline{P}_2\,\overline{P}_3} \qquad (447.)$$

woraus nach 432:

$$2\,\varrho_0 = \frac{l\,m\,n}{2\,\triangle_0} = \frac{[P_0]\,d \sin a' \sin b' \sin c'}{16\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2\,\overline{P}_3} \qquad (448.)$$

In allen diesen Formeln können vermöge §. 216 und §. 217 mit Leichtigkeit die Flächenwinkel des $\mathfrak{T}$: $\alpha, \beta \ldots$ statt $a, b \ldots$ und die Functionen der vier Tetraederecken statt der Ecken der $d_0 \ldots$ substituirt werden.

§. 227.

Nicht so einfach, wie alle diese Grössen, drückt sich der Radius der umschriebenen Kugel durch den Radius der eingeschriebenen Kugel und die Flächenwinkel des Tetraeders (oder die Winkel der Berührungsradien) aus.

Nach 151 (im 10. Cap.) ist für jeden Punct K im Tetraeder:

$$2\,\Pi_0 r_0^2 = d_1 u_0 \sin\alpha + d_2 p_0 \sin\beta + d_3 q_0 \sin\gamma$$

Ist aber K der Mittelpunct der umschriebenen Kugel, so ist $u_0 = \frac{1}{2}u$, $p_0 = \frac{1}{2}p$, $q_0 = \frac{1}{2}q$, also

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1 u \sin\alpha + d_2 p \sin\beta + d_3 q \sin\gamma \quad .$$

Setzt man hierin nach 260:

$$u\sin\alpha = \frac{w\sin^2\alpha}{\Pi_0\Pi_1},\quad p\sin\beta = \frac{w\sin^2\beta}{\Pi_0\Pi_2},\quad q\sin\gamma = \frac{w\sin^2\gamma}{\Pi_0\Pi_3}$$

so wird

$$\frac{4\,\Pi_0^2 r^2}{w} = \frac{d_1}{\Pi_1}\sin^2\alpha + \frac{d_2}{\Pi_2}\sin^2\beta + \frac{d_3}{\Pi_3}\sin^2\gamma$$

Diese Gleichung ist von der im 15. Capitel besprochenen Form:

$$\varphi_0 = \psi_1 \mathfrak{o} + \psi_2 \mathfrak{p} + \psi_3 \mathfrak{q}$$

worin

$$\varphi_0 = \frac{4\,r^2\,\Pi_0^2}{w},\quad \psi_0 = \frac{d_0}{\Pi_0},\quad \mathfrak{o} = \sin^2\alpha$$

Es folgen aus ihr noch drei andere leicht zu bildende Gleichungen von derselben Form. Eliminirt man aus den vier Gleichungen $\frac{d_1}{\Pi_1}$, $\frac{d_2}{\Pi_2}$, $\frac{d_3}{\Pi_3}$, so ergiebt sich nach 372, wenn man abkürzt:

$$\begin{aligned}
&-\sin^2\alpha\sin^2\alpha' + \sin^2\beta\sin^2\beta' + \sin^2\gamma\sin^2\gamma' = X\\
&\sin^2\alpha\sin^2\alpha' - \sin^2\beta\sin^2\beta' + \sin^2\gamma\sin^2\gamma' = Y\\
&\sin^2\alpha\sin^2\alpha' + \sin^2\beta\sin^2\beta' - \sin^2\gamma\sin^2\gamma' = Z\\
&\sin^2\alpha\sin^2\alpha'\,X + \sin^2\beta\sin^2\beta'\,Y + \sin^2\gamma\sin^2\gamma'\,Z = U:
\end{aligned}$$

$$\frac{U d_0}{\Pi_0} = \frac{4\,r^2}{w}\left\{\begin{array}{l}\Pi_1^2\sin^2\alpha'\,X + \Pi_2^2\sin^2\beta'\,Y + \Pi_3^2\sin^2\gamma'\,Z\\ \qquad - 2\,\Pi_0^2\sin^2\alpha'\sin^2\beta'\sin^2\gamma'\end{array}\right\}$$

Bilden wir danach durch Vertauschung der Ecken die dazu gehörigen drei andern, und multipliciren sie der Reihe nach mit $\Pi_0^2 w$, $\Pi_1^2 w$, $\Pi_2^2 w$, so erhalten wir:

$$\Pi_0 d_0\ Uw = 4r^2\Pi_0^2\left\{\begin{array}{r}\Pi_1^2\sin^2\alpha' X + \Pi_2^2\sin^2\beta' Y + \Pi_3^2\sin^2\gamma' Z\\ -2\Pi_0^2\sin^2\alpha'\sin^2\beta'\sin^2\gamma'\end{array}\right\}$$

$$\Pi_1 d_1\ Uw = 4r^2\Pi_1^2\left\{\begin{array}{r}\Pi_0^2\sin^2\alpha' X + \Pi_3^2\sin^2\beta Y + \Pi_2^2\sin^2\gamma Z\\ -2\Pi_1^2\sin^2\alpha'\sin^2\beta\sin^2\gamma\end{array}\right\}$$

$$\Pi_2 d_2\ Uw = 4r^2\Pi_2^2\left\{\begin{array}{r}\Pi_3^2\sin^2\alpha X + \Pi_0^2\sin^2\beta' Y + \Pi_1^2\sin^2\gamma Z\\ -2\Pi_2^2\sin^2\alpha\sin^2\beta'\sin^2\gamma\end{array}\right\}$$

$$\Pi_3 d_3\ Uw = 4r^2\Pi_3^2\left\{\begin{array}{r}\Pi_2^2\sin^2\alpha X + \Pi_1^2\sin^2\beta Y + \Pi_0^2\sin^2\gamma' Z\\ -2\Pi_3^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma'\end{array}\right\}$$

Die Addition dieser vier Gleichungen ergiebt, da

$$\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3 = 2w = [\Pi_0]\, d \text{ ist;}$$

$$Uw^2 = \tfrac{1}{4} U(\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)^2 d^2 = \qquad (449.)$$

$$4r^2\left\{\begin{array}{r}(\Pi_0^2\Pi_1^2\sin^2\alpha' + \Pi_2^2\Pi_3^2\sin^2\alpha) X\\ +(\Pi_0^2\Pi_2^2\sin^2\beta' + \Pi_1^2\Pi_3^2\sin^2\beta) Y\\ +(\Pi_0^2\Pi_3^2\sin^2\gamma' + \Pi_1^2\Pi_2^2\sin^2\gamma) Z\\ -\Pi_0^4\sin^2\alpha'\sin^2\beta'\sin^2\gamma'\\ -\Pi_1^4\sin^2\alpha'\sin^2\beta\sin^2\gamma\\ -\Pi_2^4\sin^2\alpha\sin^2\beta'\sin^2\gamma\\ -\Pi_3^4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma'\end{array}\right\}$$

eine zwar nicht einfache, aber nach sehr markirtem Gesetze gebildete Gleichung zwischen den Radien der um- und der eingeschriebenen Kugel und den Flächenwinkeln eines Tetraeders.

§. 228.

In einfacherer Form erscheint diese Gleichung, wenn wir darin die Grössen einführen:

$$l\sin\alpha' = \lambda \qquad m\sin\beta' = \mu \qquad n\sin\gamma' = n$$

$$u\sin\alpha = \upsilon \qquad p\sin\beta = \pi \qquad q\sin\gamma = \varkappa$$

welche nach 260 durch $w = \frac{1}{2}(\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)\, d$, durch die Π_0 . . und $\alpha, \beta, \ldots$, also durch den Radius der eingeschriebenen Kugel und die Flächenwinkel des Tetraeders gegeben sind, weshalb ihre Einführung hier berechtigt ist. Dadurch erscheint die Gleichung, von welcher wir im vorigen §. ausgiengen, in derselben Gestalt:

$$4\,\Pi_0 r^2 = d_1\,\upsilon + d_2\,\pi + d_3\,\varkappa$$

welche uns schon im vierzehnten Capitel zu der merkwürdigen Gleichung 282 führte.

Bilden wir, wie dort, danach die drei dazu gehörigen Gleichungen, und eliminiren d_1, d_2, d_3, so erhalten wir, indem wir abkürzen:

$$-v\lambda + \pi\mu + \varkappa\nu = \overline{X}$$
$$u\lambda - \pi\mu + \varkappa\nu = \overline{Y}$$
$$v\lambda + \pi\mu - \varkappa\nu = \overline{Z}$$
$$v\lambda\overline{X} + \pi\mu\overline{Y} + \varkappa\nu\overline{Z} = \overline{U},$$

und nach der erhaltenen Gleichung die drei andern dazu gehörigen bilden:

$$\overline{U}d_0 = 4r^2(\Pi_1\lambda\overline{X} + \Pi_2\mu\overline{Y} + \Pi_3\nu\overline{Z} - 2\Pi_0\lambda\mu\nu)$$
$$\overline{U}d_1 = 4r^2(\Pi_0\lambda\overline{X} + \Pi_3\pi\overline{Y} + \Pi_2\varkappa\overline{Z} - 2\Pi_1\lambda\pi\varkappa)$$
$$\overline{U}d_2 = 4r^2(\Pi_3\nu\overline{X} + \Pi_0\mu\overline{Y} + \Pi_1\varkappa\overline{Z} - 2\Pi_2\nu\mu\varkappa)$$
$$\overline{U}d_3 = 4r^2(\Pi_2\nu\overline{X} + \Pi_1\pi\overline{Y} + \Pi_0\nu\overline{Z} - 2\Pi_3\nu\pi\nu)$$

Addiren wir diese Gleichungen, nachdem wir sie der Reihe nach mit Π_0, Π_1, Π_2, Π_3 multiplicirt haben, so kommt wegen $\Pi_0 d_0 + \Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3 = (\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)d = [\Pi_0]d$:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{U}\cdot\frac{1}{2}[\Pi_0]d = 4r^2 \\ = \overline{U}w\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r}(\Pi_0\Pi_1\lambda + \Pi_2\Pi_3\nu)\overline{X} - \Pi_0^2\lambda\mu\nu \\ +(\Pi_0\Pi_2\mu + \Pi_1\Pi_3\pi)\overline{Y} - \Pi_1^2\lambda\pi\varkappa \\ +(\Pi_0\Pi_3\nu + \Pi_1\Pi_2\varkappa)\overline{Z} - \Pi_2^2\nu\mu\varkappa \\ - \Pi_3^2\nu\pi\nu\end{array}\right\} \quad (450.)$$

Diese Gleichung vereinigt die beiden: 283 und 449 in sich, und geht in die eine oder in die andere über, je nachdem wir nach 260 die $\lambda, \mu, \nu, \nu, \pi, \varkappa$ durch die Kanten oder die Flächenwinkel (nebst w und den $\Pi_0 \ldots, \triangle_0 \ldots$) ausdrücken.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Druckfehler.

Erster Theil.

Seite	Zeile	statt	lies
XIV	15 v. u.	dimensions	distances
7	9 » u.	Durchmesser	Durchschnitte
14	12 » o.	$e_1 e_0 = a'$	$e_1 e_0 = \alpha'$
16	14 » u.	Fig. 6	Fig. 8
20	14 » u.	CEF	CEF (Fig. 16)
20	8 » u.	ACF	ECF
22	15 » o.	Fig. 16	Fig. 24
45	19 » u.	§ 17	§. 19
78	14 » u.	Fig. 51	Fig. 40
78	6 » u.	Fig. 52	Fig. 51
78	1 » u.		
78	1 » u.	$A'B'C'$	$AB'C'$
81	2 » o.	Fig. 53	Fig. 52
88	4 » o.	43. a [2]	47. a [2]
88	19 » o.		
88	7 » u.		
104	3 » u.	$r_1 r_2 r_0$	$r_0 r_1 r_4$

In den Figuren:

Taf. 2 statt Fig. 19 s. Taf. 2 lies: Fig. 19 s. Taf. 1

In Fig. 17 sind bei F und I die Buchstaben β', γ' zu vertauschen.

» Fig. 40 ist in der Geraden OBB zu lesen: OBB'

» Fig. 44 ist in der Geraden AC statt β'', β'' zu lesen: β', β'

» Fig. 51 auf der rechten Seite statt B, C zu lessen: B', C'

» Fig. 61 an der Ecke bei B statt α zu lesen: α'

» Fig. 65 ist die Basis (das Viereck) in derselben Folge mit A, B, C, D zu bezeichnen, wie in Fig. 63.

Zweiter Theil.

Seite	Zeile	statt	lies
1	14 v. u.	gebrauchten P_0	gebrauchten. P_0
45	10 » u.	ν	$\frac{1}{2}\nu$
85	8 » o.	$X^4,\ Y^4,\ Z^4$	$\overset{(4)}{X},\ \overset{(4)}{Y},\ \overset{(4)}{Z}$
85	9 » o.	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}^2$
85	11 » u.	$-m^2p^2$	$+m^2p^2$
87	14 » o.	$\triangle_3 d$	$\triangle_3 d_3$
94	9 » u.	d_0	d
94	12 » u.		
95	5 » o.	d_0^2	d^2
132	6 » u.	$\Phi_0 \operatorname{tg} r_0,\ \sin c_0$	$\Phi_0,\ \operatorname{tg} r_0,\ \sin e_0$
133	8 » u.	Φ	Φ_0
138	6 » u.	373	372
139	9 » u.	$\varphi_0\,\varphi_2\,m$	$\varphi_2\,\varphi_0\,\mathrm{m}$

139 in der Formel 383 sind die sechs Glieder hinter dem ersten Gleichheitszeichen zu streichen.

144 in der Formel 400 sind die sieben Glieder hinter dem ersten Gleichheitszeichen zu streichen.

147 14 v. u. statt $\overline{\overline{P}_0}$ lies $\overline{P_2}$

153 8 » u. im Nenner statt $2 \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ lies $2 \sin \frac{1}{2}\mathfrak{a} \sin \frac{1}{2}\mathfrak{b}$

Fig. 75.

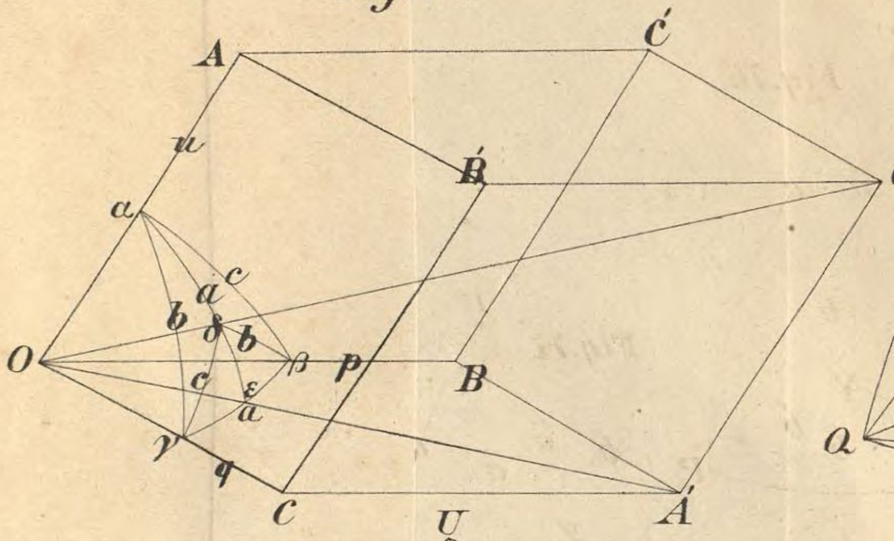


Fig. 76.

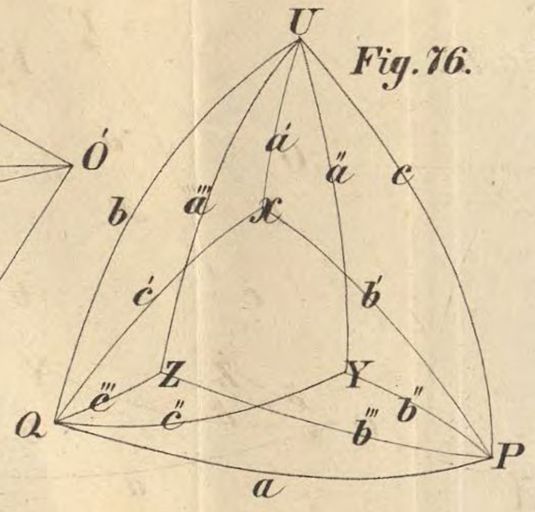


Fig. 77.

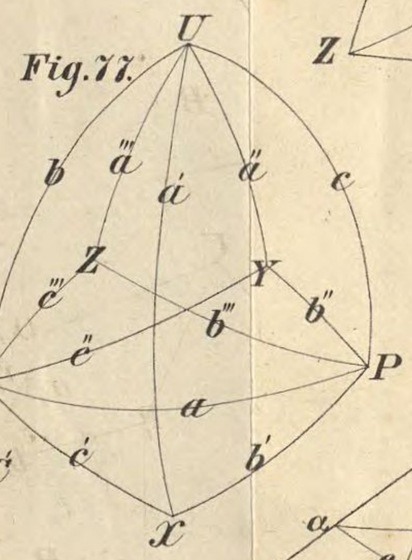


Fig. 78.

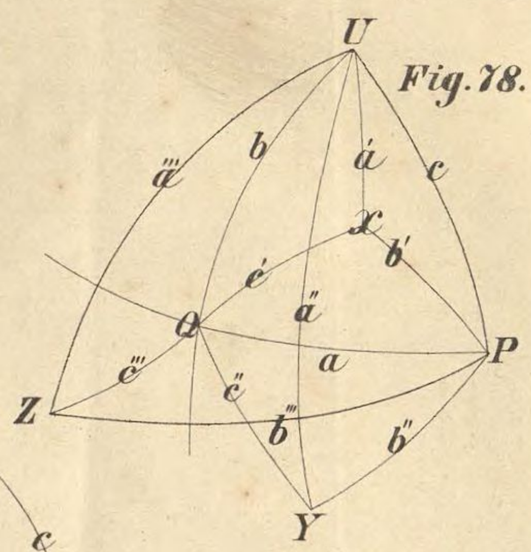


Fig. 79.

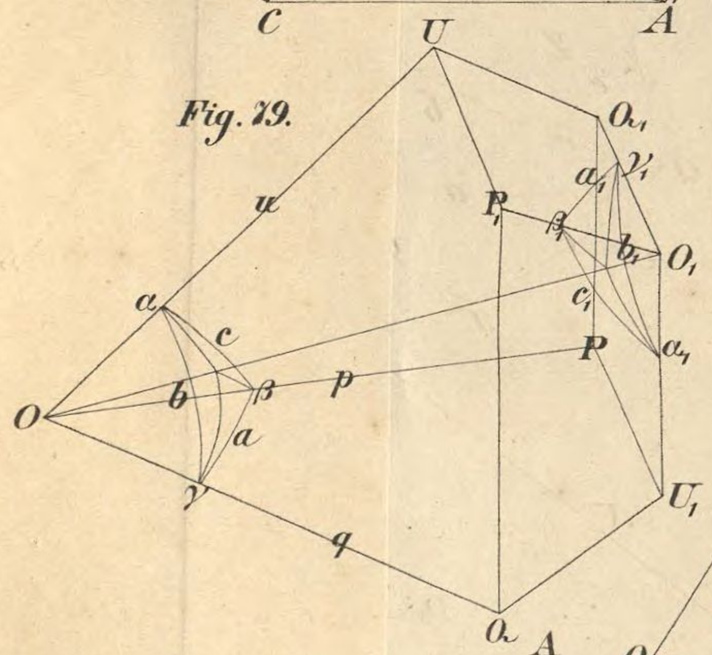


Fig. 82.

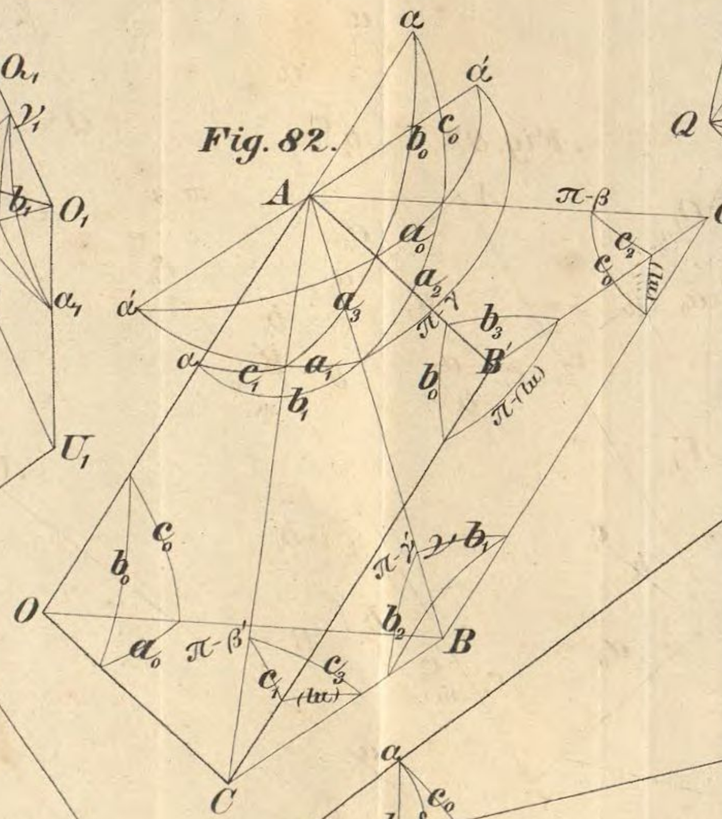


Fig. 81.

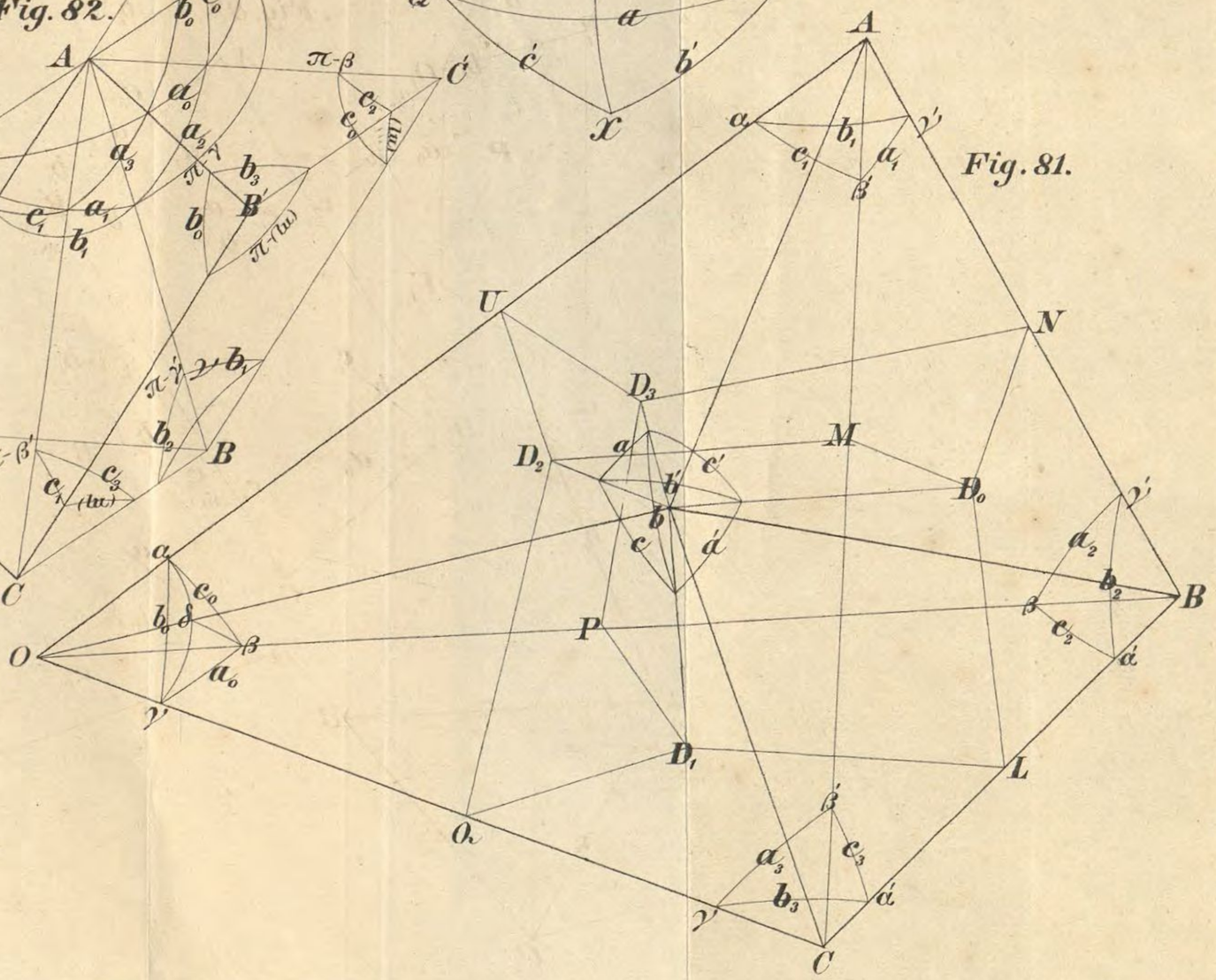


Fig. 80.

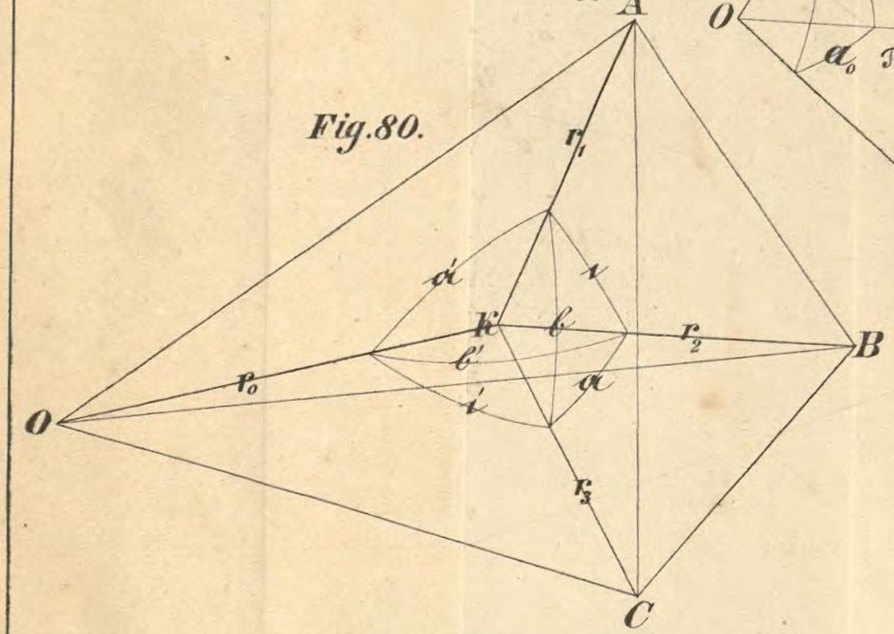


Fig. 83.

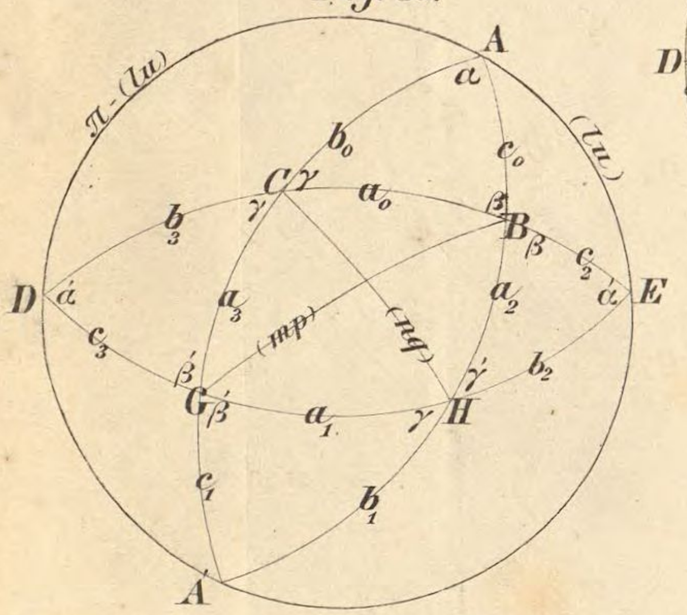


Fig. 84.

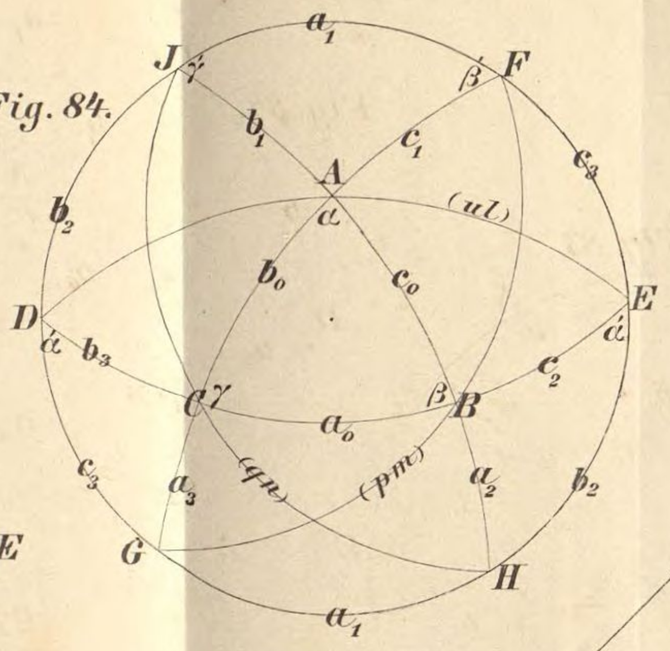


Fig. 85.

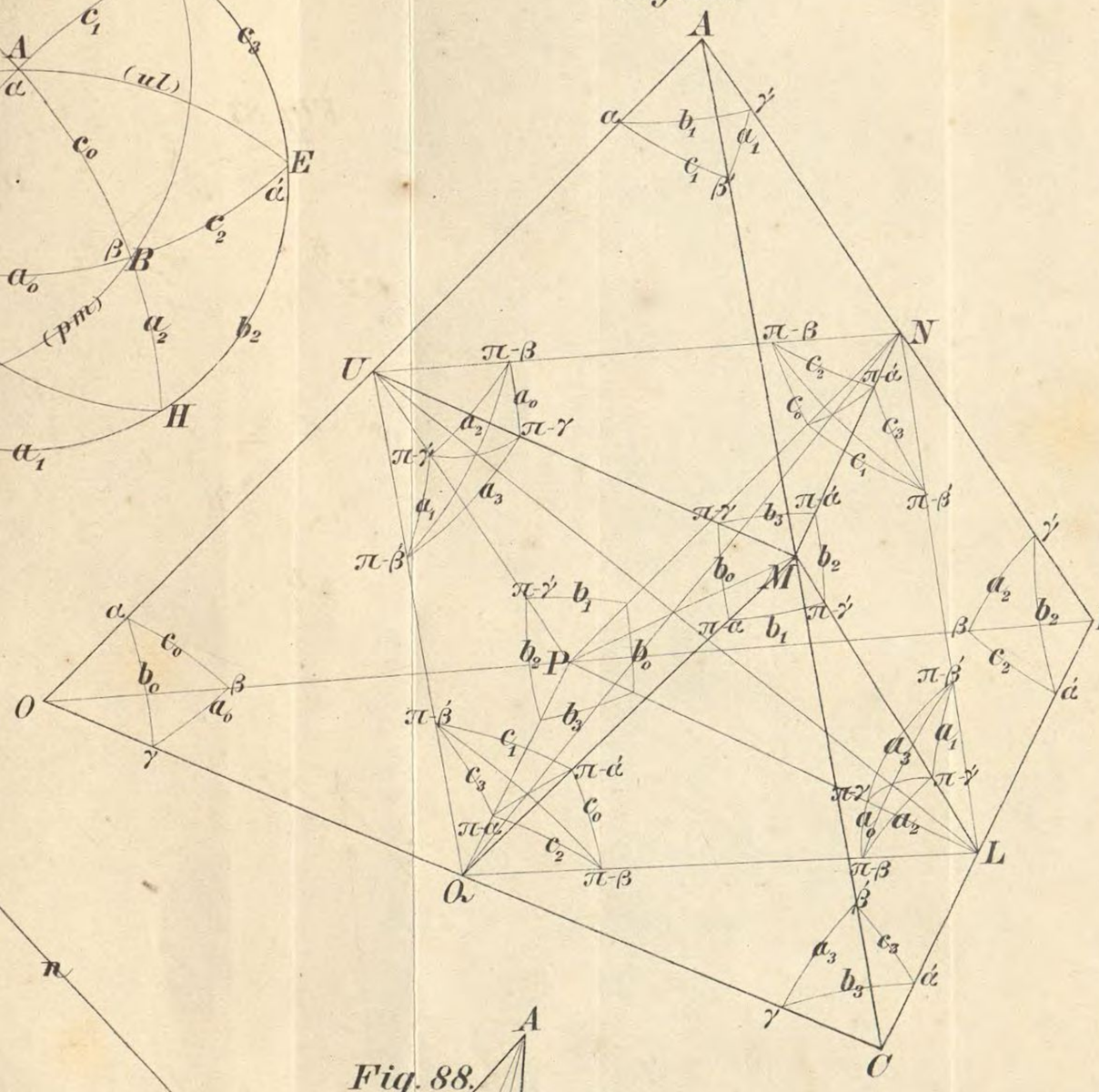


Fig. 86.

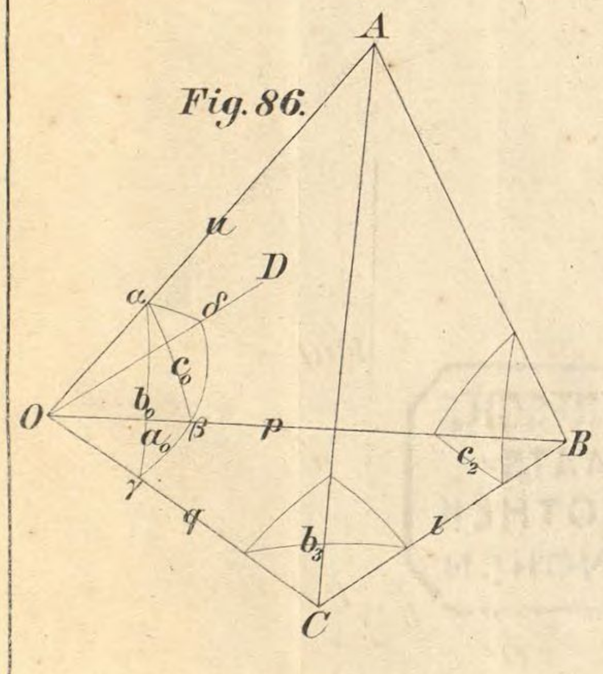


Fig. 87.

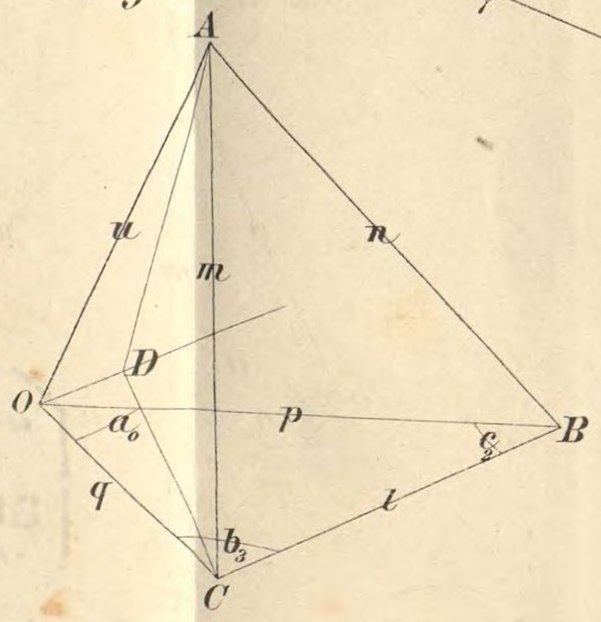


Fig. 88.

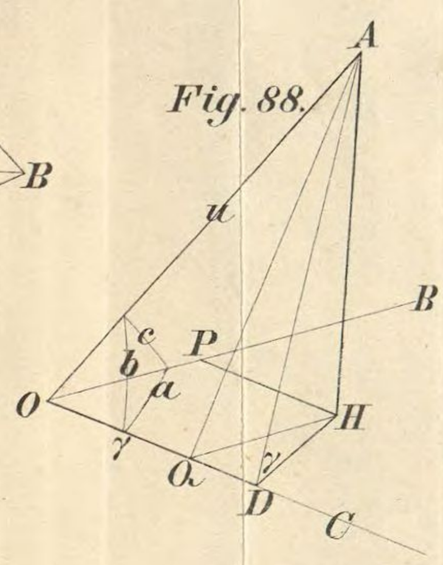
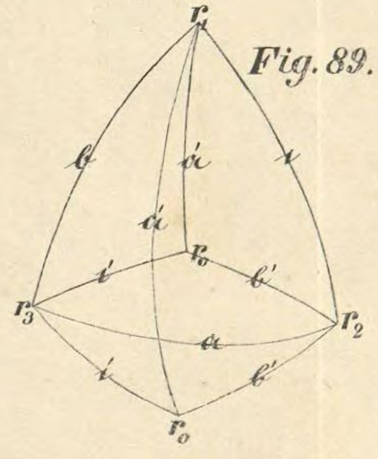


Fig. 89.



BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Junghann, Gustav,

Tetraedrometrie

Bd.: 2

Gotha 1863

Math.p. 244 k-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082110-9